# INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIV. BAND FÜNFTES HEFT 1956

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 17. September 1956

*Postverlagsort Berlin* *Preis DM 9.—*

Das

# INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 27901

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 249251

## Inhalt:

Seite

*Mewes, E.*, Formeln für die Massenkräfte und kinematischen Zusammenhänge bei geschränkten Schubkurbelgetrieben. Mit 1 Textabbildung ..... 291

*Hesse, H.*, Strömung in Blasleitungen. Mit 4 Textabbildungen ..... 299

*Müggenburg, H.*, Einflußflächen für die am bogenförmigen Rand eingespannte und am geraden Rand freie Halbkreisplatte. Mit 8 Textabbildungen ..... 308

*Volterra, E.*, Eigenvibrations of Curved Elastic Bars According to the "Method of Internal Constraints" ..... 317

*Valdenazzi, L.*, On the form of a jet issuing from a swirl atomizer. Mit 8 Textabbildungen ..... 330

*Magnus, K.*, Stationäre Schwingungen in nichtlinearen dynamischen Systemen mit Totzeiten. Mit 3 Textabbildungen ..... 341

# INGENIEUR-ARCHIV

XXIV. BAND FÜNFTES HEFT 1956


## Formeln für die Massenkräfte und kinematischen Zusammenhänge bei geschränkten Schubkurbelgetrieben


Von E. Mewes


**1. Allgemeine Beziehungen.** Für das in Abb.1 skizzierte System wird der Verlauf der Koordinaten $x$, $y$ und $\chi$ mit dem sich ständig ändernden Kurbelwinkel $\psi$ verfolgt. Enthalten sind dabei auch folgende Sonderfälle: Für $\xi = 1$ und $\eta = 0$ (Sonderfall 1) ergeben sich die Wirkungen hin- und hergehender Massen. Für $\xi = \eta = 0$ (Sonderfall 2) ergeben sich die Wirkungen unwuchtig rotierender Massen.

Wenn man von dem bei ungleichförmigen Umlauf der Kurbel um die Kurbelwellenachse drehenden Moment der Massenkräfte der umlaufenden Massen absieht, so kann man bei unwuchtig umlaufenden Massen diese auf den Anschlußpunkt 1 (Abb.1) reduzieren. Andererseits kann für die Ermittlung der Massenwirkungen die Masse des hin- und hergehenden Teils im Anschlußpunkt 2 angesetzt werden. Mit diesen Massen und der Masse des Verbindungsgliedes (Koppel) zusammen entstehe der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) $S$, der sich mit der Koppel starr verbunden bewegt.

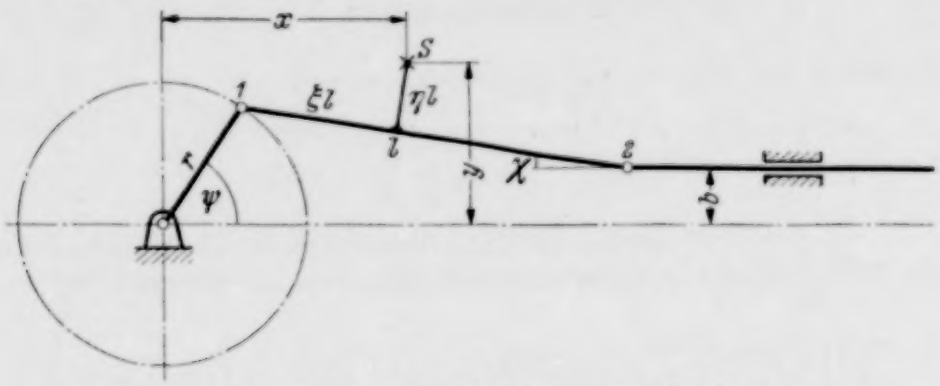


Abb. 1. Geschränktes Schubkurbelgetriebe mit einseitiger Koppel (Pleuelstange).

Der Fall $\eta \neq 0$ kommt z.B. bei V-Motoren an Hauptpleuelstangen vor, an denen jeweils ein Nebenpleuel angelenkt wird. Auch bei den sog. Horden- und Ladenschüttlern in Dreschmaschinen und anderen Siebvorrichtungen kommen Systeme gemäß Abb.1 vor, wenn man bei der Bahn des zweiten Anschlußpunktes der Koppel von den geringen Abweichungen von der Geraden absieht, die bei Halterung durch lange Lenker auftreten.

Allgemein ist nach Abb.1:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\psi + \xi l\cos\chi + \eta l\sin\chi\,, \\ y &= r\sin\psi - \xi l\sin\chi + \eta l\cos\chi\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

also mit

$$\lambda = r/l\,,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos\psi + \frac{\xi}{\lambda}\cos\chi + \frac{\eta}{\lambda}\sin\chi\,, \\ \frac{y}{r} &= \sin\psi - \frac{\xi}{\lambda}\sin\chi + \frac{\eta}{\lambda}\cos\chi\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Zum Unterschied von Zwischengleichungen sind bei den Gleichungen, die für die Ergebnisse der Schwerpunktkoordinaten und Massenkräfte und -momente benötigt werden, die Gleichungsnummern unterstrichen worden.

Im Sonderfall 1 ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos\psi + \frac{1}{\lambda}\cos\chi\,, \\ \frac{y}{r} &= \sin\psi - \frac{1}{\lambda}\sin\chi = \frac{\beta}{\lambda}\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

mit $\beta = b/l$. Allgemein gilt aus $r\sin\psi - l\sin\chi = b$ (nach Abb. 1, vgl. auch Schrifttum[1])

$$\sin\chi = \lambda\sin\psi - \beta\,. \tag{4}$$

Dabei ist $\sin\chi$ in einfacher Weise von $\psi$ abhängig; anders ist es für $\cos\chi$ und $\chi$.

Aus (4) erhält man durch Ableitung nach der Zeit mit $\omega = \dot{\psi}$

$$\dot{\chi}\cos\chi = \lambda\omega\cos\psi\,,$$

also

$$\dot{\chi} = \lambda\omega\frac{\cos\psi}{\cos\chi}\,. \tag{5}$$

Weiter ist

$$\cos\chi = \sqrt{1-\sin^2\chi} = [1-(\lambda\sin\psi-\beta)^2]^{1/2}\,. \tag{6}$$

Da in $\dot{\chi}$ auch $\cos\chi$ mit dem Exponenten $-1$ vorkommt, wird allgemein untersucht für beliebiges $m$

$$\cos^m\chi = [1-(\lambda\sin\psi-\beta)^2]^{m/2}\,. \tag{7}$$

Auf dem Wege zu Entwicklungen in *Fourier*-Reihen wird dies zunächst nach dem binomischen Satz in eine (unendliche) Potenzreihe von $\lambda\sin\psi$ entwickelt. Aus

$$\begin{aligned} \cos^m\chi &= (1-\beta^2+2\beta\lambda\sin\psi-\lambda^2\sin^2\psi)^{m/2} \\ &= (1-\beta^2)^{m/2}\left(1+\frac{2\beta}{1-\beta^2}\lambda\sin\psi-\frac{1}{1-\beta^2}\lambda^2\sin^2\psi\right)^{m/2} \end{aligned} \tag{8}$$

wird erhalten

$$\cos^m\chi = (1-\beta^2)^{m/2}\left[a_0 + a_1\frac{\lambda\sin\psi}{1-\beta^2} + a_2\left(\frac{\lambda\sin\psi}{1-\beta^2}\right)^2 + \cdots\right] \tag{9}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1\,, \\ a_1 &= \binom{m/2}{1}2\beta\,, \\ a_2 &= \binom{m/2}{2}4\beta^2 - \binom{m/2}{1}(1-\beta^2)\,, \\ a_3 &= \binom{m/2}{3}8\beta^3 - \binom{m/2}{2}\binom{2}{1}2\beta(1-\beta^2)\,, \\ a_4 &= \binom{m/2}{4}16\beta^4 - \binom{m/2}{3}\binom{3}{1}4\beta^2(1-\beta^2) + \binom{m/2}{2}\binom{2}{2}(1-\beta^2)^2\,. \\ &\cdots \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(Für $\beta = 0$ vereinfachen sich die Beziehungen erheblich.)

Setzt man statt (9)

$$\cos^m\chi = b_0 + b_1\lambda\sin\psi + b_2\lambda^2\sin^2\psi + \cdots \tag{11}$$

dann gilt (nachweisbar nach dem Satz von *Taylor*, demzufolge

$$f(-\beta+\lambda\sin\psi) = f(-\beta) + \frac{\partial f(-\beta)}{\partial(-\beta)}\frac{\lambda\sin\psi}{1!} + \frac{\partial^2 f(-\beta)}{\partial(-\beta)^2}\frac{\lambda^2\sin^2\psi}{2!} + \cdots \tag{12}$$

ist) für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$b_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n b_0}{\partial(-\beta)^n}\,, \tag{13}$$

also auch (als Rekursionsformel)

$$b_n = -\frac{1}{n}\frac{\partial b_{n-1}}{\partial\beta}\,. \tag{14}$$

[1] Z. B. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. II, Kap. XI, 2. Aufl. Berlin 1953.

Es ist

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= (1-\beta^2)^{m/2}, \\ b_1 &= (1-\beta^2)^{m/2-1}\, a_1, \\ &\cdots \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Nach (9) und (11) besteht die Beziehung

$$b_n = (1-\beta^2)^{m/2-n}\, a_n, \tag{16}$$

also auch

$$b_{n-1} = (1-\beta^2)^{m/2-n+1}\, a_{n-1}. \tag{17}$$

Aus (14) wird mit (17) entwickelt

$$b_n = -\frac{1}{n}\left[\left(\frac{m}{2}-n+1\right)(1-\beta^2)^{m/2-n}(-2\beta)\, a_{n-1} + (1-\beta^2)^{m/2-n+1}\frac{\partial a_{n-1}}{\partial \beta}\right],$$

also mit (16)

$$a_n = \frac{1}{n}\left[2\beta\left(\frac{m}{2}-n+1\right)a_{n-1} - (1-\beta^2)\frac{\partial a_{n-1}}{\partial \beta}\right]. \tag{18}$$

Mit dieser Rekursionsformel kann stets aus dem vorhergehenden Koeffizienten $a_{n-1}$ der folgende Koeffizient $a_n$ berechnet werden.

Es ist z. B. nach $a_0 = 1$

$$a_1 = m\beta \tag{19}$$

und

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}\left[2\beta\left(\frac{m}{2}-1\right)m\beta - (1-\beta^2)\, m\right] \\ &= \frac{1}{2}\, m\,[(m-2)\beta^2 - (1-\beta^2)], \end{aligned} \tag{20}$$

was dasselbe ist wie in (10). Bei Zusammenfassung der Anteile mit gleichen Potenzen von $\beta$ wird daraus erhalten

$$a_2 = -\frac{1}{2}\, m\,[1+(1-m)\beta^2]. \tag{21}$$

Wir untersuchen weiterhin die Zusammenhänge für einzelne $m$.

**2. Unterlagen für Lagekoordinaten und Massenkraftkomponenten.** Für $m=1$ erhält man entsprechend (9)

$$\cos\chi = (1-\beta^2)^{1/2}\left[e_0 + e_1\frac{\lambda\sin\psi}{1-\beta^2} + e_2\left(\frac{\lambda\sin\psi}{1-\beta^2}\right)^2 + \cdots\right] \tag{22}$$

mit

$$\begin{aligned} e_0 &= 1, \\ e_1 &= \beta, \\ e_2 &= -\frac{1}{2}, \\ e_3 &= \frac{1}{2}\beta, \\ e_4 &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\beta^2, \\ &\cdots \end{aligned}$$

mit der Rekursionsformel

$$e_n = \frac{1}{n}\left[(3-2n)\beta\, e_{n-1} - (1-\beta^2)\frac{\partial e_{n-1}}{\partial\beta}\right]. \tag{23}$$

Setzt man an

$$\cos\chi = f_0 + f_1\sin\psi - f_2\sin^2\psi + f_3\sin^3\psi - f_4\sin^4\psi + - \cdots, \tag{24}$$

so wird für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f_n = (1-\beta^2)^{\frac{1-2n}{2}}\, e_n\lambda^n(-1)^{n+1} \tag{25}$$

und mit (23) oder den aus (10) zu entwickelnden Beziehungen

$$e_{2n} = \sum_{k=n}^{2n} (-1)^k \binom{1/2}{k} \binom{k}{2n-k} (4\beta^2)^{k-n} (1-\beta^2)^{2n-k} \tag{26}$$

und

$$e_{2n-1} = 2\beta \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^k \binom{1/2}{k-1} \binom{k-1}{2n-k} (4\beta^2)^{k-n-1} (1-\beta^2)^{2n-k} \tag{27}$$

erhalten

$$\begin{aligned}
f_0 &= (1-\beta^2)^{1/2}, \\
f_1 &= (1-\beta^2)^{-1/2}\,\beta\,\lambda, \\
f_2 &= (1-\beta^2)^{-3/2}\,\frac{1}{2}\,\lambda^2, \\
f_3 &= (1-\beta^2)^{-5/2}\,\frac{1}{2}\,\beta\,\lambda^3, \\
f_4 &= (1-\beta^2)^{-7/2}\,\frac{1}{8}\,\lambda^4\,g_4 \qquad \text{mit} \quad g_4 = 1+4\beta^2, \\
f_5 &= (1-\beta^2)^{-9/2}\,\frac{3}{8}\,\beta\,\lambda^5\,g_5 \qquad g_5 = 1+\frac{4}{3}\beta^2, \\
f_6 &= (1-\beta^2)^{-11/2}\,\frac{1}{16}\,\lambda^6\,g_6 \qquad g_6 = 1+12\beta^2+8\beta^4, \\
f_7 &= (1-\beta^2)^{-13/2}\,\frac{5}{16}\,\beta\,\lambda^7\,g_7 \qquad g_7 = 1+4\beta^2+\frac{8}{5}\beta^4, \\
f_8 &= (1-\beta^2)^{-15/2}\,\frac{5}{128}\,\lambda^8\,g_8 \qquad g_8 = 1+24\beta^2+48\beta^4+\frac{64}{5}\beta^6, \\
f_9 &= (1-\beta^2)^{-17/2}\,\frac{35}{128}\,\beta\,\lambda^9\,g_9 \qquad g_9 = 1+8\beta^2+\frac{48}{5}\beta^4+\frac{64}{35}\beta^6, \\
f_{10} &= (1-\beta^2)^{-19/2}\,\frac{7}{256}\,\lambda^{10}\,g_{10} \qquad g_{10} = 1+40\beta^2+160\beta^4+128\beta^6+\frac{128}{7}\beta^8, \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{28}$$

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß die Koeffizienten bei den Potenzreihen geschlossene Ausdrücke sind; jeder der bei (28) aufgeschriebenen Ausdrücke ist vollständig.

Für Berechnung der Koeffizienten $f$ kann auch verwendet werden:

$$\begin{aligned}
(1-\beta^2)^{1/2} &= 1-\binom{1/2}{2}\beta^2+\binom{1/2}{2}\beta^4-+\cdots = 1-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{8}\beta^4-\cdots, \\
(1-\beta^2)^{-1/2} &= 1-\binom{-1/2}{1}\beta^2+\binom{-1/2}{2}\beta^4-+\cdots = 1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4+\cdots, \\
(1-\beta^2)^{-3/2} &= 1-\binom{-3/2}{1}\beta^2+\binom{-3/2}{2}\beta^4-+\cdots = 1+\frac{3}{2}\beta^2+\frac{15}{8}\beta^4+\cdots, \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{29}$$

Aus (24) wird entwickelt mit

$$\sin^{2n}\psi = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\binom{2n}{n-m}\cos 2m\,\psi, \tag{30}$$

$$\sin^{2n-1}\psi = \frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-m}\sin(2m-1)\,\psi \tag{31}$$

die *Fourier*-Reihe

$$\cos\chi = E_0 + E_1\sin\psi + E_2\cos 2\psi - E_3\sin 3\psi - E_4\cos 4\psi + + - - \cdots \tag{32}$$

mit den unendlichen Reihen

$$\left.\begin{aligned}
E_0 &= f_0 \quad -\frac{1}{4}\binom{2}{1}f_2 \quad -\frac{1}{16}\binom{4}{2}f_4 \quad -\cdots,\\
E_1 &= \quad f_1 \quad +\frac{1}{4}\binom{3}{1}f_3 \quad +\frac{1}{16}\binom{5}{2}f_5+\cdots,\\
E_2 &= \quad \frac{1}{2}\quad f_2 \quad +\frac{1}{8}\binom{4}{1}f_4 \quad +\cdots,\\
E_3 &= \quad \frac{1}{4}\quad f_3 \quad +\frac{1}{16}\binom{5}{1}f_5+\cdots,\\
E_4 &= \quad \frac{1}{8}\quad f_4 \quad +\cdots,\\
&\cdots
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt also allgemein

$$E_n = \sum_{k=n/2}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}}\binom{2k}{k-n/2} f_{2k}\,. \qquad (34)$$

Für Sonderfall 1 ist nach (3)

$$\frac{x}{r} = \cos\psi + \frac{1}{\lambda}\,(E_0 + E_1\sin\psi + E_2\cos 2\psi - E_3\sin 3\psi - E_4\cos 4\psi + + - - \cdots)\,. \qquad (35)$$

Man schreibt dafür auch

$$\frac{x}{r} = A_0 + \cos\psi + A_1\sin\psi + \frac{1}{4}A_2\cos 2\psi - \frac{1}{9}A_3\sin 3\psi - \frac{1}{16}A_4\cos 4\psi + + - - \cdots \qquad (36)$$

oder

$$\frac{x}{r} = A_0 + \cos\psi + B_1\sin\psi + \frac{1}{2}B_2\cos 2\psi - \frac{1}{3}B_3\sin 3\psi - \frac{1}{4}B_4\cos 4\psi + + - - \cdots \qquad (37)$$

mit $A_0 = E_0/\lambda$ und für $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$A_n = n\,B_n = n^2 E_n/\lambda. \qquad (39)$$

Für den allgemeinen Fall nach Abb. 1 gilt nach (2) mit (4) und (32)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{r} &= \cos\psi + \eta\left(\sin\psi - \frac{\beta}{\lambda}\right) + \frac{\xi}{\lambda}\,(E_0 + E_1\sin\psi + E_2\cos 2\psi - E_3\sin 3\psi\\
&\qquad - E_4\cos 4\psi + + - - \cdots),\\
\frac{y}{r} &= \sin\psi - \xi\left(\sin\psi - \frac{\beta}{\lambda}\right) + \frac{\eta}{\lambda}\,(E_0 + E_1\sin\psi + E_2\cos 2\psi - E_3\sin 3\psi\\
&\qquad - E_4\cos 4\psi + + - - \cdots).
\end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Daraus ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\dot{x}}{r\omega} &= -\sin\psi + (\eta + \xi B_1)\cos\psi - \xi B_2\sin 2\psi - \xi B_3\cos 3\psi + + - - \cdots,\\
\frac{\dot{y}}{r\omega} &= (1 - \xi + \eta B_1)\cos\psi - \eta B_2\sin 2\psi - \eta B_3\cos 3\psi + + - - \cdots
\end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

und für $\omega = \text{konst.}$

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\ddot{x}}{r\omega^2} &= \cos\psi + (\eta + \xi A_1)\sin\psi + \xi A_2\cos 2\psi - \xi A_3\sin 3\psi - \xi A_4\cos 4\psi + + - - \cdots,\\
-\frac{\ddot{y}}{r\omega^2} &= (1 - \xi + \eta A_1)\sin\psi + \eta A_2\cos 2\psi - \eta A_3\sin 3\psi - \eta A_4\cos 4\psi + + - - \cdots.
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Heißen die Komponenten der freien Massenkraft $X$ und $Y$, so sind die in (42) dargestellten Größen auch $X/mr\omega^2$ und $Y/mr\omega^2$, wenn $m$ die (in $S$ zusammengefaßte) bewegte Masse ist.

**3. Drehungen des Verbindungsgliedes (Koppel, Pleuel) im Schubkurbelgetriebe.** Der Verlauf von $\chi$ ist noch zu bestimmen. Bei dem in (5) vorkommenden $1/\cos\chi$ ist gemäß (9) für $m = -1$

$$\frac{1}{\cos\chi} = (1 - \beta^2)^{-1/2}\left[i_0 + i_1\frac{\lambda\sin\psi}{1-\beta^2} + i_2\left(\frac{\lambda\sin\psi}{1-\beta^2}\right)^2 + \cdots\right] \qquad (43)$$

mit $i_0 = 1$ und für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$i_{2n} = \sum_{k=n}^{2n} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \binom{k}{2n-k} (4\beta^2)^{k-n} (1-\beta^2)^{2n-k}, \tag{44}$$

$$i_{2n-1} = 2\beta \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^k \binom{-1/2}{k-1} \binom{k-1}{2n-k} (4\beta^2)^{k-n-1} (1-\beta^2)^{2n-k} \tag{45}$$

bzw. mit der Rekursionsformel nach (18)

$$i_n = \frac{1}{n}\left[\beta(1-2n)\, i_{n-1} - (1-\beta^2)\frac{\partial i_{n-1}}{\partial \beta}\right]. \tag{46}$$

Die Koeffizientenanteile sind zweckmäßig jeweils nach Potenzen von $\beta$ zu ordnen. Damit wird z. B.

$$i_1 = -\beta,$$
$$i_2 = \frac{1}{2} + \beta^2,$$
$$i_3 = -\beta\left(\frac{3}{2} + \beta^2\right).$$

Bei Ansatz von

$$\frac{1}{\cos\chi} = k_0 - k_1 \sin\psi + k_2 \sin^2\psi - k_3 \sin^3\psi + - \cdots \tag{47}$$

ist

$$k_0 = (1-\beta^2)^{-1/2} \tag{48}$$

und

$$k_n = (-1)^n (1-\beta^2)^{-1/2-n} i_n \lambda^n, \tag{49}$$

also

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= (1-\beta^2)^{-3/2}\beta\lambda, \\ k_2 &= (1-\beta^2)^{-5/2}\frac{1}{2}\lambda^2 l_2 \quad \text{mit} \quad l_2 = 1 + 2\beta^2, \\ k_3 &= (1-\beta^2)^{-7/2}\frac{3}{2}\beta\lambda^3 l_3 \quad \text{mit} \quad l_3 = 1 + \frac{2}{3}\beta^2 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

usw. zu berechnen aus (49) mit (46). Für $\cos\psi \sin^m\psi$ erhält man infolge der Beziehungen (30), (31) und

$$\cos\psi \sin m\psi = \frac{1}{2}\left[\sin(m+1)\psi + \sin(m-1)\psi\right], \tag{51}$$

$$\cos\psi \cos m\psi = \frac{1}{2}\left[\cos(m+1)\psi + \cos(m-1)\psi\right] \tag{52}$$

die Beziehungen

$$\cos\psi \sin^{2n}\psi = \frac{1}{2^{2n}}\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} c_{nk} \cos(2k-1)\psi + (-1)^n \cos(2n+1)\psi\right], \tag{53}$$

$$\cos\psi \sin^{2n-1}\psi = \frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} d_{nk} \sin 2k\psi + (-1)^{n-1} \sin 2n\psi\right] \tag{54}$$

mit

$$c_{nk} = \binom{2n}{n-k+1} - \binom{2n}{n-k} = \frac{2k-3}{n-k+1}\binom{2n}{n-k} \text{ für } n-k+1 > 0 \tag{55}$$

und

$$d_{nk} = \binom{2n-1}{n-k} - \binom{2n-1}{n-k-1} = \frac{2k}{n-k}\binom{2n-1}{n-k+1} \text{ für } n-k > 0. \tag{56}$$

Damit ergibt sich die *Fourier*-Reihe (vgl. *Biezeno-Grammel*)

$$\cos\psi/\cos\chi = D_1 \cos\psi - D_2 \sin 2\psi - D_3 \cos 3\psi + + - - \cdots \tag{57}$$

mit den unendlichen Reihen

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= k_0 + \frac{1}{4}\,c_{11}\,k_2 + \frac{1}{16}\,c_{21}\,k_4 + \cdots, \\ D_3 &= \quad\frac{1}{4}\quad k_2 + \frac{1}{16}\,c_{22}\,k_4 + \cdots, \\ &\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

$$\left.\begin{aligned} D_2 &= \frac{1}{2}\,k_1 + \frac{1}{8}\,d_{21}\,k_3 + \frac{1}{32}\,d_{31}\,k_5 + \cdots, \\ D_4 &= \quad\frac{1}{8}\quad k_3 + \frac{1}{32}\,d_{32}\,k_5 + \cdots, \\ &\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Dabei ist z. B.

$$c_{11} = \binom{2}{1} - \binom{2}{0} = 1\,, \quad c_{21} = \binom{4}{2} - \binom{4}{1} = 2\,, \quad c_{31} = \binom{6}{3} - \binom{6}{2} = 5\,,$$

$$c_{22} = \binom{4}{1} - \binom{4}{0} = 3\,, \quad c_{32} = \binom{6}{2} - \binom{6}{1} = 9\,,$$

$$c_{33} = \binom{6}{1} - \binom{6}{0} = 5\,,$$

$$d_{21} = \binom{3}{1} - \binom{3}{0} = 2\,, \quad d_{31} = \binom{5}{2} - \binom{5}{1} = 5\,,$$

$$d_{32} = \binom{5}{1} - \binom{5}{0} = 4\,.$$

Für die Drehbeschleunigung $\ddot{\chi}$ gilt (vgl. *Biezeno-Grammel*)

$$-\ddot{\chi}/\lambda\omega^2 = C_1 \sin\psi + C_2 \cos 2\psi - C_3 \sin 3\psi - C_4 \cos 4\psi + + - - \cdots$$
$$- \dot{\omega}/\omega^2\,(D_1 \cos\psi - D_2 \sin 2\psi - D_3 \cos 3\psi + D_4 \sin 4\psi + - \cdots) \qquad (60)$$

mit

$$C_n = n\,D_n\,. \qquad (61)$$

Durch Integration von (5) mit (57) wird erhalten

$$\chi = \lambda\,(-F_0 + F_1 \sin\psi + F_2 \cos 2\psi - F_3 \sin 3\psi - F_4 \cos 4\psi + + - - \cdots) \qquad (62)$$

mit

$$F_n = \frac{D_n}{n} = \frac{C_n}{n^2} \qquad \text{für } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (63)$$

und

$$F_0 = \frac{1}{\lambda}\ \text{arc sin}\,\beta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,F_{2n}\,. \qquad (64)$$

**4. Berechnung der Massenkraftkomponenten für ein Beispiel.** Um die Anwendung einiger Formeln zu zeigen, wird ein Beispiel behandelt. Dabei sei die Kurbelwelle dreifach mit je 120° Kurbelversetzungswinkel gekröpft. An jeder Kurbel sei ein gleich großer Schüttler als Koppel angelenkt. Die Bahnen der Gleitstücke liegen nebeneinander. Berechnet werden im folgenden die Massenkraftkomponenten der einzelnen „Schüttlerläden" und die freien Massenkraftkomponenten des Gesamtaggregats. Letztere sind

$$\left.\begin{aligned} X_g &= 3\,m\,r\,\omega^2\,\xi\,(-A_3 \sin 3\,\psi + A_6 \cos 6\,\psi - A_9 \sin 9\,\psi + - \cdots), \\ Y_g &= 3\,m\,r\,\omega^2\,\eta\,(-A_3 \sin 3\,\psi + A_6 \cos 6\,\psi - A_9 \sin 9\,\psi + - \cdots). \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Auf die Momente wird dabei hier nicht eingegangen.

Gegeben ist $\beta = 0{,}4$. Dafür wird erhalten

$$(1-\beta^2)^{1/2} = 0{,}917\,, \quad (1-\beta^2)^{-3/2} = 1{,}30\,, \quad (1-\beta^2)^{-7/2} = 1{,}84\,,$$
$$(1-\beta^2)^{-1/2} = 1{,}091, \quad (1-\beta^2)^{-5/2} = 1{,}55, \quad (1-\beta^2)^{-9/2} = 2{,}19 \text{ usw.}$$

und außer $e_0 = 1$, $e_2 = -0{,}5$, $i_0 = 1_1$ $e_1 = 0{,}4$, $e_3 = 0{,}2$, $e_4 = -0{,}205, \ldots$, $i_1 = -0{,}4$, $i_2 = 0{,}66$, $i_3 = -0{,}664, \ldots$ $f_0 = 0{,}917$, $k_0 = 1{,}091$.

Gegeben ist ferner $\lambda = 0{,}2$. Damit wird erhalten

$$f_1 = 0{,}0873,\ f_2 = 0{,}0260,\ f_3 = 0{,}00248,\ f_4 = 0{,}000604,\ f_5 = 0{,}000128, \ldots$$
$$k_1 = 0{,}104,\ k_2 = 0{,}041,\ k_3 = 0{,}0098, \ldots,$$
$$E_0 = 0{,}917 - 0{,}013 = 0{,}904,$$
$$E_1 = 0{,}0873 + 0{,}0019 + 0{,}0001 = 0{,}0893,$$
$$E_2 = 0{,}0130 + 0{,}0003 = 0{,}0133,$$
$$E_3 = 0{,}00062 + 0{,}00004 = 0{,}00066,$$
$$E_4 = 0{,}0001,$$
$$A_0 = 4{,}52,\ A_1 = 0{,}447,\ A_2 = 0{,}266,\ A_3 = 0{,}030,\ A_4 = 0{,}0016, \ldots,$$
$$B_1 = 0{,}447,\ B_2 = 0{,}133,\ B_3 = 0{,}010,\ B_4 = 0{,}0004, \ldots,$$
$$D_1 = 1{,}091 + 0{,}010 = 1{,}101 = C_1 = F_1,\ F_0 = 2{,}08,$$
$$D_2 \approx 0{,}0520 + 0{,}0025 = 0{,}0545,\ C_2 = 0{,}109,\ F_2 = 0{,}0273.$$

Somit ist

$$\chi = 0{,}2\,(-2{,}08 + 1{,}10 \sin\psi + 0{,}03 \cos 2\psi - + \cdots),$$
$$-\frac{\ddot{\chi}}{\lambda\,\omega^2} = 1{,}10 \sin\psi + 0{,}11 \cos 2\psi - + \cdots.$$

Gegeben ist ferner als Umdrehungszahl 600 U/min. Damit wird

$$\omega = 62{,}8\,s^{-1},\quad \lambda\,\omega^2 = 790\,s^{-2},$$
$$\ddot{\chi} = -870 \sin\psi - 87 \cos 2\psi + - \cdots.$$

Für ein Massenträgheitsmoment einer Koppel um die Querachse durch ihren Schwerpunkt von 0,06 kg$m\,s^2$ ergibt sich als Moment in kgm von der Massenwirkung einer Koppel um diese Achse

$$M \approx 52 \sin\psi + 5 \cos 2\psi - + \cdots.$$

Gegeben ist ferner $\xi = 0{,}4$, $\eta = 0{,}1$. Damit wird für eine Koppel

$$\frac{X}{m\,r\,\omega^2} = \cos\psi + 0{,}279 \sin\psi + 0{,}106 \cos 2\psi - 0{,}012 \sin 3\psi - + \cdots,$$
$$\frac{Y}{m\,r\,\omega^2} = 0{,}645 \sin\psi + 0{,}027 \cos 2\psi - 0{,}003 \sin 3\psi - + \cdots$$

Für das Gesamtaggregat mit drei Koppeln (Schüttlern) ist

$$\frac{X_g}{m\,r\,\omega^2} = -0{,}036 \sin 3\psi + - \cdots; \qquad \frac{Y_g}{m\,r\,\omega^2} = -0{,}009 \sin 3\psi + - \cdots.$$

Die Koeffizienten bei den weiteren Gliedern sind viel kleiner als die aufgeschriebenen. Für $m\,r\,\omega^2 = 1000$ kg ist $X_{g\,max} = 36$ kg, $Y_{g\,max} = 9$ kg und der Größtwert der resultierenden freien Massenkraft $R_{g\,max} = \sqrt{36^2 + 9^2} \approx 37$ kg.

Für einen Schüttlerkasten ergibt sich nach obigem als für dieses Beispiel $(\beta, \lambda)$ brauchbare Näherung für die Massenkraftkomponenten

$$\left.\begin{aligned}
X \approx m\,r\,\omega^2 \Big\langle & \cos\psi + \Big\{\eta + \xi \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big[1 + \frac{3}{8}\frac{\lambda^2}{(1-\beta^2)^2} + \cdots\Big]\Big\} \sin\psi \\
& + \frac{\xi}{\sqrt{1-\beta^2}^{\,3}}\Big\{\lambda\Big[1 + \Big(\frac{1}{4} + \beta^2\Big)\frac{\lambda^2}{(1-\beta^2)^2} + \cdots\Big] \cos 2\psi \\
& - \Big[\frac{9}{8}\lambda^2 \frac{\beta}{1-\beta^2} + \cdots\Big] \sin 3\psi - + \cdots\Big\}\Big\rangle, \\
Y \approx m\,r\,\omega^2 \Big\langle & \Big\{1 - \xi + \eta \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big[1 + \frac{3}{8}\frac{\lambda^2}{(1-\beta^2)^2} + \cdots\Big]\Big\} \sin\psi \\
& + \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}^{\,3}}\Big\{\lambda\Big[1 + \Big(\frac{1}{4} + \beta^2\Big)\frac{\lambda^2}{(1-\beta^2)^2} + \cdots\Big] \cos 2\psi \\
& - \Big[\frac{9}{8}\lambda^2 \frac{\beta}{1-\beta^2} + \cdots\Big] \sin 3\psi - + \cdots\Big\}\Big\rangle
\end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

Solche Formeln, bei denen die Abbruchstellen für die Reihen bewußt an bestimmte Stellen gesetzt wurden, können aber für andere Beispiele wegen größerer Fehler unzweckmäßig sein. Man sollte dann stets wieder von den vorher angegebenen, vollständigen Reihenangaben (42) mit (39), (33), (25) und (23) ausgehen.

Aus dem Institut für Landtechnische Grundlagenforschung der Forschungsanstalt für Landwirtschaft, Braunschweig-Völkenrode.

(Eingegangen am 17. Januar 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Ernst Mewes*, (20b) Braunschweig, Bundesallee 50.

# Strömung in Blasleitungen

Von H. Hesse

**1. Einleitung.** Bei der pneumatischen Förderung wird das feste Gut in eine Rohrleitung gegeben, in der es von einem Luftstrom mitgerissen und dadurch weiterbewegt wird. Die aufgegebenen Körner haben zunächst im wesentlichen die Geschwindigkeit null und werden durch die strömende Luft beschleunigt. Außer der dazu nötigen Arbeit muß von dem Luftstrom noch diejenige aufgebracht werden, die zur Überwindung der Reibung an der Rohrwand dient. Die folgenden Überlegungen befassen sich mit diesen Vorgängen; dagegen soll von denen, die durch Steigung oder Fall der Leitung bedingt sind, abgesehen werden[1].

**2. Ableitung der Gleichungen.** Es seien bezeichnet mit $L$ das in der Zeiteinheit durch die Leitung strömende Luftgewicht [kg/s], $G$ das in der Zeiteinheit durch die Leitung geförderte Gutgewicht [kg/s], $\gamma_l$ das spezifische Gewicht der Luft [kg/m³], $\gamma_g$ das spezifische Gewicht des festen Gutes [kg/m³], $v$ die mittlere Luftgeschwindigkeit über den Rohrquerschnitt [m/s], $c$ die mittlere Geschwindigkeit des festen Gutes [m/s], $F$ der Rohrquerschnitt [m²].

Für die Strömung im Rohr gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{L}{\gamma_l v} + \frac{G}{\gamma_g c} = F = F_l + F_g \,. \tag{1}$$

Wenn man sich das Gemisch in zwei Ströme getrennt denkt, stellt der erste Summand den Querschnitt $F_l$ für die Luft, der zweite den für das feste Gut $F_g$ dar. Es werde ein unendlich kleines Stück des Förderweges $s$ [m] abgegrenzt. In dem entstehenden Raumelement ($F\,ds$) befindet sich an Luftgewicht $F_l\,\gamma_l\,ds$ und an Körnergewicht $F_g\,\gamma_g\,ds$. Nach Gl. (1) ergibt sich das Verhältnis des in dem Raumelement befindlichen Luftgewichtes zu dem des festen Gutes wie $L$ zu $G\,v/c$.

Nach dem Impulssatz muß der Unterschied zwischen den Bewegungsgrößen der in das Raumelement in der Zeiteinheit ein- und austretenden Stoffmengen gleich dem Unterschied der auf den Ein- und Austrittsquerschnitt während dieser Zeit wirkenden Kraft sein, also gleich dem Unterschied der Produkte aus dem Querschnitt $F$ und dem Druck $P$ [kg/m²]. Durch die Bewegungsgrößen der Luft und des festen Gutes ist aber der Impuls, der durch die Reibung auf das Rohr ausgeübt wird, nicht erfaßt. Er soll daher vor Aufstellung der Impulsgleichung von $dP$ abgezogen werden. Man teilt die Reibung in die durch die Luft verursachte $dP_l$ und die durch das feste Gut verursachte $dP_s$. Es ist

$$dP_l = \lambda \frac{v^2 \gamma_l}{2\,g\,D}\,ds \,, \tag{2}$$

worin $\lambda$ die Widerstandsziffer der Rohrleitung gegen Luft und $D$ [m] den Rohrdurchmesser bedeuten. Für $dP_s$ läßt sich während der Beschleunigung des Fördergutes die von *Barth*[2] angegebene Gleichung verwenden:

$$dP_s = k \frac{c^2}{2\,g\,D}\left(\frac{G}{F\,c}\right) ds \,. \tag{3}$$

$G/(F\,c)$ ist ein gedachtes spezifisches Gewicht, das entstehen würde, wenn man das feste Gut gleichmäßig den Raum ausfüllend, über den Rohrquerschnitt verteilte. $k$ ist eine Konstante, die Widerstandsziffer des Rohres gegen das feste Gut.

---

[1] Während der Niederschrift dieser Arbeit erschien über das gleiche Thema ein Aufsatz von *Weidner*, „Grundsätzliche Untersuchung über den pneumatischen Fördervorgang, insbesondere über die Verhältnisse bei Beschleunigung und Umlenkung", Forschung Ing.-Wes., Düsseldorf 1955, S. 145. Da aber in dem vorliegenden Aufsatz immerhin einiges Neue dazu beigetragen wird, besonders was den Vorgang bei großer Gutbeladung und die Aufgabe des festen Gutes ins Rohr betrifft, so dürfte sich seine Veröffentlichung doch noch lohnen.

[2] *W. Barth*, Fortschritte der Verfahrenstechnik S. 63, Weinheim a. d. Bergstr., 1952/53; *Weidner*, Untersuchung über den pneumatischen Fördergang, . . . , Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1955, S. 147. Der dort verwendete Beiwert $a_s = k/8$.

Nun läßt sich die Impulsgleichung niederschreiben:

$$F\,(dP - dP_l - dP_s) = \frac{L}{g}\,dv + \frac{G}{g}\,dc$$

oder

$$F\,dP = \frac{L}{g}\,dv + \frac{G}{g}\,dc + (F\,\lambda\,v^2\,\gamma_l + k\,c\,G)\,\frac{ds}{2\,g\,D}\,. \tag{4}$$

Diese Gleichung sagt noch nichts aus über die Kraft, die zwischen den Bestandteilen $L$ und $G$ des Gemisches auftritt. Je nach der Art der Körner ist diese Kraft proportional der ersten bis zweiten Potenz der Relativgeschwindigkeit $v - c$. Die Abweichung von der zweiten Potenz werde mit $n$ bezeichnet. Das kennzeichnende Maß für diese Kraft, die dem Widerstand der Körner gleich ist, ist ihre Sinkgeschwindigkeit $w_f$ [m/s] in Luft des Betriebszustandes, bei der sich Widerstand und Gewicht aufheben. Nach Feststellungen von *Barth*[1] ändern sich die Sinkgeschwindigkeit mit der Gutskonzentration $G\,v/(L\,c)$ und die Berichtigung $n$ des Exponenten 2 mit der Anströmgeschwindigkeit $v - c$. Das in $t$ Sekunden aufgegebene Gewicht $G\,t$ leistet also einen Widerstand

$$W = G\,t\left(\frac{v-c}{w_f}\right)^{2-n}. \tag{5}$$

Aus einer Impulsgleichung von der Art (4) erhält man eine für die Kräfte, wenn man sie durch das Zeitelement $dt$ dividiert. Die Kräftegleichung für das feste Gut muß noch ein Glied enthalten, das den Widerstand des in 1 s aufgegebenen Gutes ausdrückt, weil der Impuls nach (4) auch jede Sekunde neu erteilt werden muß. Sie lautet

$$F_g\,\frac{dP}{dt} - F\,\frac{dP_s}{dt} + \frac{W}{t} = \frac{G}{g}\,\frac{dc}{dt}$$

oder, wenn man mit Hilfe der Beziehung $c = ds/dt$ das Zeitelement und mit Hilfe der Stetigkeitsgleichung (1) $F_g$ ersetzt,

$$\frac{G}{\gamma_g}\,\frac{dP}{ds} - G\,\frac{k}{2\,g\,D}\,c^2 + G\left(\frac{v-c}{w_f}\right)^{2-n} = \frac{G}{g}\,c\,\frac{dc}{ds}\,. \tag{6}$$

Will man die entsprechende Kräftegleichung für die Luft aufstellen, so muß man beachten, daß $dt = ds/c$ festgesetzt ist. Man erhält dann

$$\frac{L}{\gamma_l}\,\frac{dP}{ds} - F\,\lambda\,\frac{v^3\,\gamma_l}{2\,g\,D} - G\,\frac{v}{c}\left(\frac{v-c}{w_f}\right)^{2-n} = \frac{L}{g}\,v\,\frac{dv}{ds}\,. \tag{7}$$

Wenn man die Kräftegleichungen (6) und (7) mit dem Wege $ds$ multipliziert, so stellen die einzelnen Summanden abgegebene oder verbrauchte Leistungen dar, Arbeiten in derselben Zeit $dt$ sowohl in (6), als auch in (7), da $G$ und $L$ in der gleichen Zeit durch jeden Querschnitt der Leitung strömen. Man erkennt, daß die Luft an Leistung $\frac{W}{t}\,\frac{v}{c}\,ds$ abgibt, aber das feste Gut nur $\frac{W}{t}\,ds$ aufnehmen kann. Der Unterschied kann nur in Reibungswärme verwandelt werden. Er ist

$$dR = \frac{W}{t}\left(\frac{v}{c} - 1\right)ds = G\,\frac{(v-c)^{3-n}}{c\,w_f^{2-n}}\,ds\,. \tag{8}$$

**3. Integrierung der Gleichungen.** Es sei vorausgeschickt, daß in allen folgenden Ausführungen das spezifische Gewicht der Luft $\gamma_l$ als unveränderlich angenommen ist. Dann lassen sich unter gewissen Bedingungen einzelne Gleichungen oder Teile davon integrieren.

Erster Fall: $F_g$ ist klein gegen $F_l$. Dann kann man $L/(\gamma_l\,v) \approx F$ setzen. Führt man anstelle der Veränderlichen $v$ im Reibungsglied der Impulsgleichung (4) $L/(\gamma_l\,F)$ ein, so läßt sich der größte Teil davon unter Voraussetzung eines gleichbleibenden $F$ geschlossen integrieren:

$$\Delta P \approx \frac{L}{g\,F}\,(v - v_0) + \frac{G}{g\,F}\,(c - c_0) + \frac{\lambda\,L^2}{2\,g\,\gamma_l\,F^2\,D}\,(s - s_0) + \frac{k\,G}{2\,g\,D\,F}\int_{s_0}^{s} c\,ds\,. \tag{9}$$

Die Größen mit Index 0 bezeichnen den Anfangswert der Integrierung. Zur vollständigen Lösung brauchen wir eine Beziehung zwischen $c$ und $s$. Dazu benutzen wir am besten die Kräftegleichung (6), in der wir das erste Glied vernachlässigen können, wenn $F_g$ vernachlässigt werden kann.

---

[1] *W. Barth*, Chemie-Ingenieur-Technik 26 (1954), S. 31.

Dann bleibt $v$ angenähert konstant. Es ergibt sich der Differentialquotient

$$\frac{ds}{dc} \approx \frac{1}{\frac{g}{c}\left(\frac{v-c}{w_f}\right)^{2-n} - k\frac{c}{2D}}. \tag{10}$$

Diese Gleichung läßt sich graphisch integrieren, indem man $ds/dc$ über $c$ aufträgt und die entstandene Fläche planimetriert. Dann zeichnet man ein Schaubild $c$ über $s$ und erhält wieder durch Planimetrieren $\int c\,ds$ in (9).

Für $n = 0$ läßt sich (10) auch geschlossen integrieren. In die Gleichung

$$ds \approx \frac{c\,dc}{\frac{g\,v^2}{w_f^2} - \frac{2\,g\,v}{w_f^2}c + \left(\frac{g}{w_f^2} - \frac{k}{2D}\right)c^2}$$

führt man ein

$$g\,v/w_f^2 \equiv a \quad \text{und} \quad g/w_f^2 - k/(2\,D) \equiv h\,.$$

Dann ergibt sich

$$s - s_0 \approx \frac{1}{2h}\left[\ln\frac{a\,v - 2\,a\,c + h\,c^2}{a\,v - 2\,a\,c_0 + h\,c_0^2} + a\sqrt{\frac{2\,D}{a\,v\,k}}\ln\frac{a\,(c + c_0 - v) - (c - c_0)\sqrt{0{,}5\,a\,v\,k/D - h\,c_0\,c}}{a\,(c + c_0 - v) + (c - c_0)\sqrt{0{,}5\,a\,v\,k/D - h\,c_0\,c}}\right]. \tag{11}$$

Unter der Bedingung $n = 0$ läßt sich Gl. (8) teilweise geschlossen integrieren, wenn man sie in einzelne Summanden auflöst:

$$R - R_0 \approx \frac{G}{w_f^2}\left[v^3\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{c} - 3\,v^2\,(s - s_0) + 3\,v\int_{s_0}^{s} c\,ds - \int_{s_0}^{s} c^2\,ds)\right].$$

Der Reibungsverlust innerhalb des Gemisches ergibt sich daraus zu

$$\begin{aligned} R - R_0 \approx \frac{G}{w_f^2}\Bigg[&\left(v - \frac{3a}{h}\right)v^2\sqrt{\frac{D}{2\,a\,v\,k}}\ln\frac{a\,(c + c_0 - v) - (c - c_0)\sqrt{0{,}5\,a\,v\,k/D - h\,c\,c_0}}{a\,(c + c_0 - v) + (c - c_0)\sqrt{0{,}5\,a\,v\,k/D - h\,c\,c_0}} \\ &- \frac{3\,v^2}{2h}\ln\frac{a\,v - 2\,a\,c + h\,c^2}{a\,v - 2\,a\,c_0 + h\,c_0^2} + 3\,v\int_{s_0}^{s} c\,ds - \int_{s_0}^{s} c^2\,ds\Bigg]^{1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Die beiden letzten Glieder muß man wieder graphisch integrieren. In Abb. 1 sind die Werte von $c$ und $P$ über dem nach der Formel (11) berechneten Weg $s$ für Weizen dargestellt.

Zweiter Fall: Berücksichtigung von $F_g$. Es gibt auch Förderleitungen, bei denen man $F_g$ nicht vernachlässigen darf, z. B. solche für Kohlenstaub. Da kommt es vor, daß das Staubvolumen $(G/\gamma_g)$ größer als das Luftvolumen $(L/\gamma_l)$ ist[2]. Ist $v$ konstant, so muß der Rohrquerschnitt $F$ nach der Stetigkeitsbeziehung in der Stromrichtung abnehmen. Eine Lösung kann für konstantes $v$ angegeben werden, wenn es angängig ist, für $F$ und $D$ in den Gliedern für die Rohrreibung der Gl. (4) Mittelwerte $F_m$ und $D_m$ einzusetzen. Das Glied für die Beschleunigung des festen Gutes formt man mit Hilfe der Stetigkeitsgleichung (1) um. Führt man für die Gutbeladung $G/L$ die Bezeichnung $\mu$ ein, so ergibt sich

$$\Delta P \approx \int_{c_0}^{c}\frac{c}{g\left(\frac{c}{\mu\,\gamma_l\,v} + \frac{1}{\gamma_g}\right)}dc + \lambda\frac{v^2\,\gamma_l}{2\,g\,D_m}(s - s_0) + k\frac{G}{2\,g\,D_m\,F_m}\int_{s_0}^{s} c\,ds\,.$$

Setzt man im ersten Integral als neue Veränderliche

$$x \equiv \frac{c}{\mu\,\gamma_l\,v} + \frac{1}{\gamma_g}$$

---

[1] Siehe Hütte I 1949, S. 107, Nr. 9 und 10. Von den im Logarithmus des zweiten Summanden angegebenen Vorzeichen kommt hier nur das positive in Frage; für $c_0 = 0$ ist der damit versehene Bruch positiv, wenn $G\left(\frac{v-c}{w_f}\right)^2 > G\frac{k}{2\,g\,D}c^2$. Das ist immer der Fall.

[2] *Erk*, Chemieingenieur 1 (1933) S. 140.

ein, so läßt es sich lösen, und man erhält

$$\Delta P \approx \frac{1}{g}\left[\mu\, v\, \gamma_l\,(c - c_0) + (\mu\, v\, \gamma_l)^2 \frac{1}{\gamma_g} \ln \frac{\mu\, v\, \gamma_l + c_0\, \gamma_g}{\mu\, v\, \gamma_l + c\, \gamma_g}\right] + \lambda \frac{v^2\, \gamma_l}{2\, g\, D_m}(s - s_0) + \frac{2\, k\, G}{g\, D_m^3\, \pi} \int_{s_0}^{s} c\, ds\,. \quad (9\,a)$$

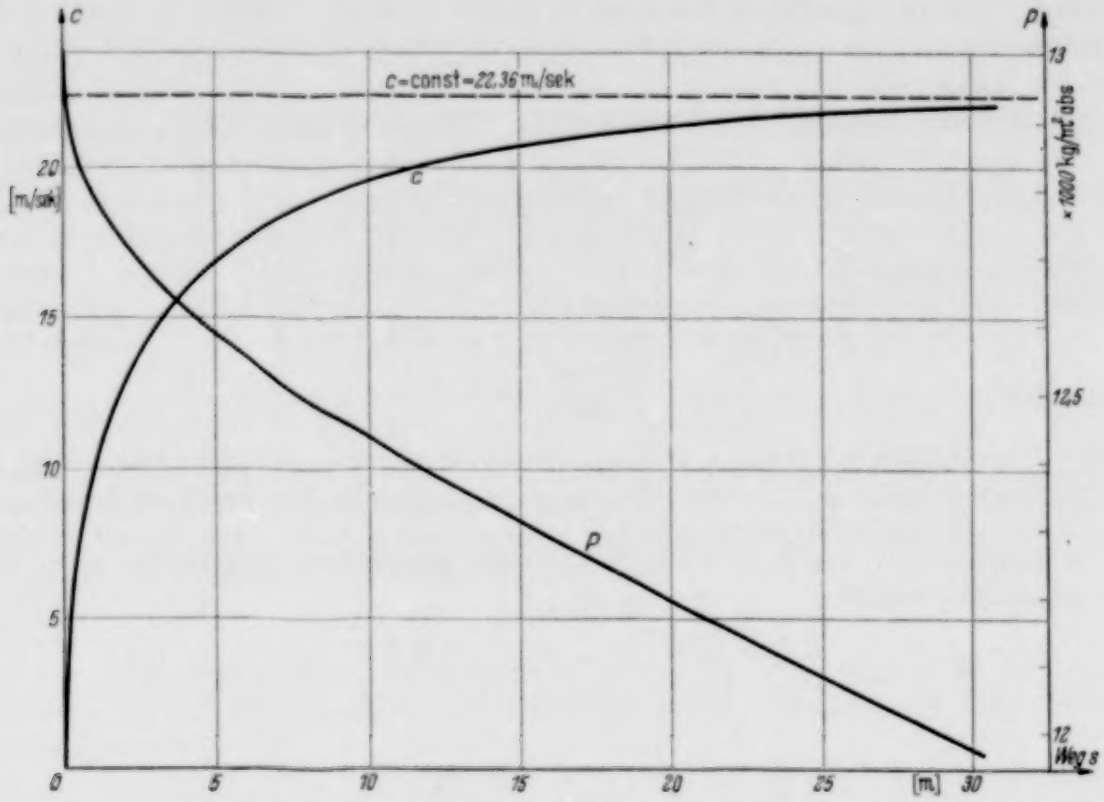


Abb. 1. Zunahme der Gutgeschwindigkeit $c$ und Druckverlauf $P$ in der Rohrstrecke $s$ für Weizen ($n = 0$) bei folgenden Annahmen: $v = 30$ m/s = konst., $w_f = 9{,}8$ m/s, $D = 0{,}113$ m, $\mu = 4$, $k = 0{,}0027$, $\gamma_g = 1260$ kg/m³, $\gamma_l = 1{,}58$ kg/m³ ≈ konst., $\lambda = 0{,}025$, $P_0 = 13000$ kg/m² abs., $c_0 = 0$.

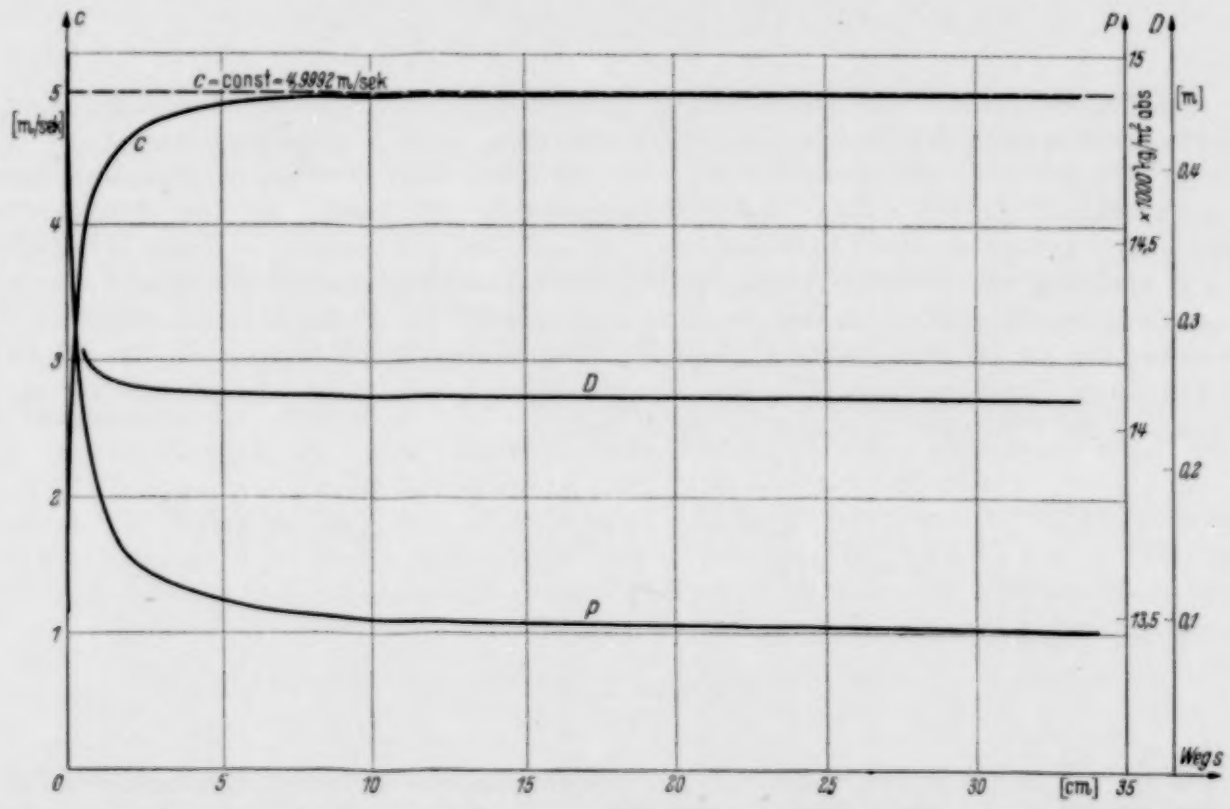


Abb. 2. Zunahme der Gutgeschwindigkeit $c$, Druckverlauf $P$ und Rohrdurchmesser $D$ für einen Staub (Kohlenstaub) bei folgenden Annahmen: Korndurchmesser 0,075—0,08 mm, $w_f = 0{,}217$ m/s (Z. VDI 1928, S. 947), $\mu = 3000$, $v = 5$ m/s = konst., $\gamma_g = 1400$ kg/m³, $\gamma_l = 1{,}75$ kg/m³ ≈ konst., $k = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}025$, $n = 0{,}6$ im Durchschnitt gesetzt, zunehmend mit $c$ von etwa 0,2 bis 0,85, berechnet mit Hilfe der *Oseen*schen Gleichung, $P_0 = 15\,000$ kg/m² abs., $c_0 = 0$.

Weil man in der Kräftegleichung (6) den Summanden $\frac{G}{\gamma_g}\frac{dP}{ds}$ nicht mehr weglassen darf, vereinigt man (6) und (7), um $dP$ zu entfernen und erhält

$$\frac{ds}{dc} \approx \frac{1}{\frac{g}{c}\left(\mu\frac{\gamma_l}{\gamma_g}\frac{v}{c}+1\right)\left(\frac{v-c}{w_f}\right)^{2-n}+\frac{D_m\,\pi\,\lambda\,\gamma_l^2\,v^3}{8\,L\,\gamma_g\,c}-\frac{k}{2\,D_m}c}. \tag{10a}$$

Je größer die Gutbeladung, um so kleiner ist die durch die Luft verursachte Rohrreibung gegenüber der durch das feste Gut hervorgerufenen. Bei großem $\mu$ wird man meist $\lambda = 0$ setzen können. In Abb. 2 ist $c$, $P$ und $D$ über $s$ für Staub bei großer Gutbeladung $\mu$ dargestellt. Es ist dabei an Kohlenstaub gedacht. Die Beziehung von $c$ zu $s$ wurde nach (10a) durch graphische Integrierung gefunden. Auf diese Weise kann man auch die Reibung innerhalb des Gemisches nach (8) bestimmen.

**4. Der Beharrungszustand $v$ = konst., $c$ = konst.** Im Falle daß $F_g$ sehr klein ist gegen $F_l$, kann man in (6) den ersten Summanden wieder gleich null setzen, und es wird

$$\frac{k\,c^2}{2\,g\,D} \approx \left(\frac{v-c}{w_f}\right)^{2-n},$$

weil die Beschleunigung des festen Gutes auf der rechten Seite der Gleichung verschwindet. Ist $n = 0$, so ergibt sich daraus das von *Barth*[1] angegebene Verhältnis

$$\frac{c}{v} \approx \frac{1}{1+w_f\sqrt{k/(2\,g\,D)}}. \tag{13}$$

Darf man $n$ nicht außer Acht lassen, so lautet die Gleichung

$$\frac{c}{v} \approx \frac{1}{1+w_f\sqrt{\frac{k}{2\,g\,D}\left[\frac{v}{w_f}\left(1-\frac{c}{v}\right)\right]^n}}. \tag{13a}$$

Diese wird man anwenden, wenn $n$ näher an null als an 1 liegt. Liegt dagegen $n$ näher an 1 als an null, so rechnet man vorteilhafter nach der Gleichung

$$\frac{c}{v} \approx \sqrt{\frac{2\,g\,D}{k\,v^n\,w_f^{2-n}}\left(1-\frac{c}{v}\right)^{1-n}+\left[\frac{g\,D\,(1-c/v)^{1-n}}{k\,v^n\,w_f^{2-n}}\right]^2}-\frac{g\,D}{k\,v^n\,w_f^{2-n}}\left(1-\frac{c}{v}\right)^{1-n}. \tag{13b}$$

Man kann aber auch $(1-c/v)^{2-n}$ in eine binomische Reihe zerlegen und erhält dann für $c/v$ eine Gleichung zweiten, dritten oder höheren Grades je nachdem, bis zu welcher Potenz von $c/v$ man die Glieder der Reihe berücksichtigt. Tut man dies bis zur zweiten Potenz, so erhält man

$$\frac{c}{v} \approx \frac{\sqrt{2\,g\,D\,[k\,w_f^{2-n}\,v^n-g\,D\,(2-n)\,(1-n)]+[g\,D\,(2-n)]^2}-g\,D\,(2-n)}{k\,w_f^{2-n}\,v^n-g\,D\,(2-n)\,(1-n)}. \tag{13c}$$

Am besten rechnet man den angenäherten Wert von $c/v$ aus (13c) aus und setzt ihn auf den rechten Seiten von (13a) oder (13b) ein.

Ist es nicht statthaft, $F_g$ zu vernachlässigen, so eliminieren wir $dP/ds$ aus den Gleichungen (6) und (7), deren rechte Seiten zu null werden, und erhalten

$$\gamma_g\left[\frac{k}{2\,g\,D}c^2-\left(\frac{v-c}{w_f}\right)^{2-n}\right]=\gamma_l\left[\frac{D\,\pi\,\lambda\,v^3\,\gamma_l}{8\,g\,L}+\mu\frac{v}{c}\left(\frac{v-c}{w_f}\right)^{2-n}\right].$$

Daraus läßt sich entsprechend (13a) und (13b) eine Gleichung dritten Grades von der Form

$$\left(\frac{c}{v}\right)^3+l\left(\frac{c}{v}\right)^2+m\frac{c}{v}+p=0 \tag{14}$$

ableiten, worin $l$, $m$ und $p$ anstelle der folgenden Ausdrücke gesetzt sind: im Falle $0{,}5 > n > 0$

$$l \equiv \frac{2\,g\,D\,(2\,\gamma_g-\mu\,\gamma_l)}{\gamma_g\,[k\,w_f^{2-n}\,v^n\,(1-c/v)^n-2\,g\,D]}, \qquad m \equiv \frac{8\,g\,D\,L\,(2\mu\,\gamma_l-\gamma_g)\,(1-c/v)^{-n}-D^2\,\pi\,\gamma_l^2\,\lambda\,v^{1+n}\,w_f^{2-n}}{4\,L\,\gamma_g\,[k\,w_f^{2-n}\,v^n-2\,g\,D\,(1-c/v)^{-n}]},$$

$$p \equiv \frac{-2\,g\,D\,\mu\,\gamma_l}{\gamma_g\,[k\,w_f^{2-n}\,v^n\,(1-c/v)^n-2\,g\,D]}$$

[1] *W. Barth*, Fortschritte der Verfahrenstechnik (1952/53) S. 63.

und im Falle $1 > n > 0{,}5$

$$l' \equiv \frac{2\,g\,D}{k\,v^n\,w_f^{2-n}}\left(1-\frac{c}{v}\right)^{1-n}, \qquad m' \equiv \frac{8\,g\,D\,L\,(\mu\,\gamma_l-\gamma_g)\,(1-c/v)^{1-n}-D^2\,\pi\,\gamma_l^2\,\lambda\,v^{1+n}\,w_f^{2-n}}{4\,L\,v^n\,w_f^{2-n}\,\gamma_g\,k},$$

$$p' \equiv -\frac{2\,\gamma_l\,\mu\,g\,D}{\gamma_g\,k\,v^n\,w_f^{2-n}}\left(1-\frac{c}{v}\right)^{1-n}.$$

Die Koeffizienten mit Strich treten an die Stelle derer ohne Strich in (14). Wendet man wieder die Zerlegung in eine binomische Reihe an, die man hinter dem quadratischen Gliede von $c/v$ abbricht, so ergibt sich ebenfalls eine Gleichung von der Form (14), deren Koeffizienten mit dem Index $b$ versehen seien:

$$l_b \equiv \frac{g\,D\,(2-n)\,[2\,\gamma_g-\mu\,\gamma_l\,(1-n)]}{\gamma_g\,[k\,w_f^{2-n}\,v^n-g\,D\,(2-3\,n+n^2)]},$$

$$m_b \equiv \frac{8\,g\,D\,L\,[\mu\,\gamma_l\,(2-n)-\gamma_g]-D^2\,\pi\,\lambda\,v^{1+n}\,w_f^{2-n}\,\gamma_l^2}{4\,L\,\gamma_g\,[k\,w_f^{2-n}\,v^n-g\,D\,(2-3\,n+n^2)]},$$

$$p_b \equiv -\frac{2\,g\,D\,\mu\,\gamma_l}{\gamma_g\,[k\,w_f^{2-n}\,v^n-g\,D\,(2-3\,n+n^2)]}.$$

Oft wird man die Reibung zwischen Luft und Rohr gegen die zwischen festem Gut und Rohr vernachlässigen können, also $\lambda = 0$ setzen. Aus den durch Reihenentwicklung erhaltenen Koeffizienten $l_b$, $m_b$ und $p_b$ ergeben sich nur ungenaue Werte für $c/v$, so daß eine Nachrechnung mit den Koeffizienten $l$, $m$, $p$, bzw. $l'$, $m'$ und $p'$ nötig ist. Zur Lösung von (14) wird man sich meist der goniometrischen Methode bedienen müssen, die für das oben ausgerechnete Beispiel für Staub sich in folgender Form ergibt[1]:

$$\frac{c}{v} = 2\sqrt{\frac{l^2}{9}-\frac{m}{3}}\,\cos\left\{60^\circ+\frac{1}{3}\arccos\frac{(l/3)^3-l\,m/6+0{,}5\,p}{[(l/3)^2-m/3]\sqrt{(l/3)^2-m/3}}\right\}. \tag{15}$$

Führt man hier die Koeffizienten $l_b$, $m_b$ und $p_b$ für den Staub ein, so wird $c/v = 0{,}864$. Setzt man diesen Wert in die Koeffizienten $l'$, $m'$ und $p'$ ein, so erhält man das genaue $c/v$ zu fast 1.

**5. Die Aufgabestelle.** Wenn man nach den oben aufgestellten integrierten Formeln von Anfang an die Zustände in einer Förderleitung berechnen will, fehlt noch der Ausgangswert $c_0$. Vor allem deswegen seien die Verhältnisse an der Aufgabestelle erörtert. Sie sei so ausgeführt, wie das Schema in Abb. 3 zeigt. Die Anfangsgeschwindigkeit der Körner in der Stromrichtung sei beim Einfallen $c_0'$. Der Abstand eines Punktes vom Anfang der Aufgabestelle in Stromrichtung werde mit $b$ [m] bezeichnet. Die gesamte Länge der Aufgabestelle sei $b_e$. Die Zugabe des festen Gutes soll gleichmäßig über $b_e$ verteilt sein.

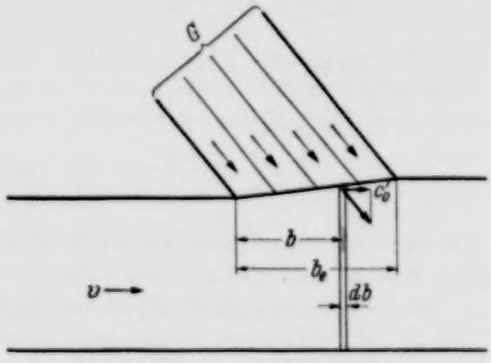

Abb. 3. Schema der Aufgabestelle.

Die Körnchen haben also in einem Querschnitt verschiedene Geschwindigkeiten, so daß Zusammenstöße vorkommen. Ich nehme an, daß alle zuerst dem Luftstrom zugeführten Körnchen auf die später dazukommenden stoßen und daß das feste Gut unelastisch ist. Unelastische Körper gleichen dabei ihre Geschwindigkeit aneinander an, so daß ich voraussetzen kann, daß sich für jeden Querschnitt eine einheitliche Geschwindigkeit $c'$ ergibt.

Es erfolgen dabei auch schiefe Stöße, durch die Körner gegen die Rohrwand geworfen werden. Die Wand sei vollkommen elastisch. Dann tritt durch den Aufprall kein Energieverlust ein. Würde ein von der Wand zurückgeworfenes Korn ohne andere Behinderung wieder mit dem zusammentreffen, von dem es den vorhergehenden schiefen Stoß erhielt, und wäre dieses von der anderen Seite der Rohrwand ebenfalls ohne Behinderung reflektiert, so würden beide Körner in Richtung der Rohrachse mit gleicher Geschwindigkeit weiterfliegen, wenn sie vor dem ersten Zusammenstoß beide diese Richtung hatten. Die Gesamtwirkung aller schiefen Stöße wird der gleich sein, die erzielt würde, wären die Stöße alle gerade gewesen. Die Wand wirft die Körnchen mit derselben Wucht wieder in den Strom, mit welcher sie auftrafen. In Wirklichkeit gibt es

[1] Siehe Hütte 1948, I. Band, S. 77.

weder ganz unelastische, noch vollkommen elastische Körper, und man kann daher wohl annehmen, daß sich der Fehler, den man durch die Annahme der elastischen Rohrwand macht, ausgleicht gegen den, der sich aus der Annahme der unelastischen Körner ergibt.

Es kommen aber auch exzentrische Stöße vor, durch die Körner außerdem in Drehung versetzt werden. Eine Nachrechnung ergibt, daß selbst bei Maiskörnern die dafür verbrauchte Energie sehr gering gegen die für die translatorische Bewegung ist. Die Drehung soll vernachlässigt werden.

Die früher aufgestellten Gleichungen sollen nun für die Aufgabestelle abgeändert werden. Anstelle des gleichbleibenden $G$ tritt das veränderliche Gutgewicht $G\,b/b_e$. Die Stetigkeitsgleichung lautet also hier

$$\frac{L}{\gamma_l\, v} + \frac{G\,b}{b_e\,\gamma_g\,c'} = F_l + F_g = F\,. \tag{1b}$$

Während von den Reibungsgleichungen (2) und (3) die für die Luft unverändert gilt — anstelle von $ds$ tritt $db$—, lautet die für das feste Gut

$$dP_s = k\,\frac{c'^2}{2\,g\,D}\left(\frac{G\,b}{b_e\,F\,c'}\right)db\,. \tag{3b}$$

Zur Aufstellung der neuen Impulsgleichung schneidet man eine unendlich dünne Querschnittsscheibe von der Dicke $db$ aus dem Rohr der Aufgabestelle. Zwischen Vorder- und Rückseite der Scheibe tritt das Gutgewicht $G\,db/b_e$ mit der Geschwindigkeit $c_0'$ zu dem bereits vorhandenen $G\,b/b_e$ hinzu. Die Geschwindigkeit des neu hinzutretenden wird durch Stoß nach Voraussetzung auf $c'$ erhöht, die des bereits vorhandenen durch die Förderluft um $dc'$. Die Gleichung (4) wandelt sich also in

$$F\,dP = \frac{L}{g}\,dv + \frac{G\,b}{g\,b_e}\,dc' + \frac{G}{g}\,(c' - c_0')\,\frac{db}{b_e} + \left(F\,\lambda\,v^2\,\gamma_l + k\,c'\,G\,\frac{b}{b_e}\right)\frac{db}{2\,g\,D} \tag{4b}$$

oder

$$F\,dP = \frac{L}{g}\,dv + \frac{G}{g\,b_e}\,[d\,(b\,c') - c_0'\,db] + \left(F\,\lambda\,v^2\,\gamma_l + k\,c'\,G\,\frac{b}{b_e}\right)\frac{db}{2\,g\,D}\,.$$

Aus den beiden Impulsgleichungen für das feste Gut einerseits und die Luft andrerseits erhält man durch Division mit $dt = db/c'$ die Kräftegleichungen

$$\frac{G\,b}{b_e\,\gamma_g}\,\frac{dP}{db} + \frac{G\,b}{b_e}\left(\frac{v-c'}{w_f}\right)^{2-n} = \frac{G\,c'}{b_e\,g}\left[\frac{d(b\,c')}{db} - c_0'\right] + k\,G\,\frac{b}{b_e}\,\frac{c'^2}{2\,g\,D}\,, \tag{6b}$$

$$\frac{L}{\gamma_l}\,\frac{dP}{db} - \frac{G\,b}{b_e}\,\frac{v}{c'}\left(\frac{v-c'}{w_f}\right)^{2-n} = \frac{L}{g}\,v\,\frac{dv}{db} + F\,\lambda\,\frac{v^3\,\gamma_l}{2\,g\,D}\,. \tag{7b}$$

Soweit in das Rohr festes Gut mit der Geschwindigkeit $c_0'$ eingeführt wird, wird außer dem Reibungsverlust zwischen den strömenden Stoffen, der sich entsprechend der Gleichung (8) hier zu

$$dR = \frac{W}{t}\left(\frac{v}{c'} - 1\right)db = G\,\frac{b}{b_e}\,\frac{(v-c')^{3-n}}{c'\,w_f^{2-n}}\,db \tag{8b}$$

ergibt, auch der Arbeitsverlust infolge der Zusammenstöße der Körnchen $S$ [mkg/s] in Wärme verwandelt. Um ihn zu bestimmen, bildet man aus (6b) durch Multiplikation mit $db$ die Arbeitsgleichung und zerlegt das Differential $d\,(b\,c')$ in zwei Summanden

$$\frac{G\,b}{b_e\,\gamma_g}\,dP + \frac{G\,b}{b_e}\left(\frac{v-c'}{w_f}\right)^{2-n}db = \frac{G\,b}{g\,b_e}\,c'\,\frac{\partial c'}{\partial b}\,db + \frac{G}{g}\,(c'^2 - c'\,c_0')\,\frac{db}{b_e} + k\,\frac{G\,b\,c'^2}{b_e\,2\,g\,D}\,db\,. \tag{16}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite der Gleichung stellt die Zunahme der Bewegungsenergie des vom Anfang bis $b$ bereits aufgegebenen festen Gutes auf dem Wege $db$ dar, der zweite Summand die aufzuwendende Stoßarbeit, die die Geschwindigkeit der auf dem Wege $db$ neu hinzutretenden Menge $(G\,db/b_e)$ von $c_0'$ auf $c'$ erhöht. Vor dem Stoß war ihre Wucht $\frac{G}{g}\,\frac{c_0'^2}{2}\,\frac{db}{b_e}$, danach $\frac{G}{g}\,\frac{c'^2}{2}\,\frac{db}{b_e}$. Bringt man jenen Summanden in die Form $\frac{G}{g}\left(\frac{c'^2}{2} - \frac{c_0'^2}{2} + \frac{c'^2 - 2\,c'\,c_0' + c_0'^2}{2}\right)\frac{db}{b_e}$, so erkennt man, daß der Stoßverlust

$$dS = \frac{G}{g}\,\frac{(c'-c_0')^2}{2}\,\frac{db}{b_e} \tag{17}$$

ist. Dies ist derselbe Betrag, den man erhielte, wenn man $dS$ nach der Lehre der Physik für den unelastischen Stoß berechnete. Ist $c'_0 = 0$, so wird die Hälfte des Arbeitsaufwandes für die Stöße in Wärme verwandelt.

Eliminiert man $dP/db$ aus den Kräftegleichungen (6b) und (7b) und setzt man die dafür erhaltenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man die allgemeine Beziehung zwischen $c'$, $v$ und $b$

$$2\,c'\,\frac{c'-c'_0}{b}+\frac{d(c'^2)}{db}=\left(\mu\,\frac{b\,\gamma_l\,v}{b_e\,\gamma_g\,c'}+1\right)2\,g\left(\frac{v-c'}{w_f}\right)^{2-n}+2\,\frac{\gamma_l}{\gamma_g}\,v\,\frac{dv}{db}+\lambda\,\frac{D\,\pi\,\gamma_l^2\,v^3}{4\,L\,\gamma_g}-\frac{k\,c'^2}{D}\,.$$

Ist das Volumen der festen Bestandteile klein gegen das Luftvolumen und nimmt man $v$ konstant an, so verschwindet $\frac{G\,b\,dP}{b_e\,\gamma_g\,db}$ in (6b), und man erhält unmittelbar

$$\frac{d(c'^2)}{db}+2\,\frac{c'^2}{b}-2\,\frac{c'\,c'_0}{b}\approx 2\,g\left(\frac{v-c'}{w_f}\right)^{2-n}-\frac{k\,c'^2}{D}\,. \tag{18}$$

Wenn $n = 0$ ist, läßt sich diese Gleichung zum Teil integrieren, indem man $c'$ durch $db/dt$ ersetzt. Es wird unter Verwendung der Abkürzungen $a \equiv \frac{g\,v}{w_f^2}$ und $h \equiv g/w_f^2 - k/(2\,D)$

$$c'\approx\frac{c'_0}{h\,b}\,(e^{h\,b}-1)+\frac{2\,a}{h}\left[1+\frac{1}{h\,b}\,(1-e^{h\,b})\right]+a\,v\,\frac{e^{h\,b}}{b}\int_0^b b\,e^{-h\,b}\,\frac{db}{c'}\;^{1}\,. \tag{19}$$

Das ungelöste Integral verschwindet für den Anfang der Aufgabestelle. Dort kann man $dc'/db = c'/b$ setzen und bei ganz kleinen Werten von $b$ aus (18) $c'$ berechnen.

Wenn $F_g$ gegenüber $F$ klein und $v$ konstant ist, gewinnt man aus der Impulsgleichung (4b)

$$\Delta P\approx\frac{G\,b}{g\,b_e\,F_m}\,(c'-c'_0)+\frac{\lambda\,v^2\,\gamma_l}{2\,g\,D_m}\,b+\frac{k\,G}{g\,b_e\,D_m^3\,\pi}\int_0^b c'\,d(b^2)\,. \tag{20}$$

Darin ist nach (19)

$$\int_0^b c'\,d(b^2)\approx\frac{2\,c'_0}{h}\left(\frac{e^{h\,b}}{h}-b\right)+\frac{2\,a}{h}\left[b\left(b+\frac{2}{h}\right)-\frac{2}{h^2}\,e^{h\,b}\right]+2\,a\,v\int_0^b e^{h\,b}\left(\int_0^b e^{-h\,b}\,b\,\frac{db}{c'}\right)db+K$$

für $n = 0$. Für $b = 0$ wird das ungelöste Integral wieder gleich null, und die Integrationskonstante $K$ berechnet sich aus diesem Fall zu

$$K=\frac{4\,a}{h^3}-2\,\frac{c'_0}{h^2}\,.$$

Damit wird

$$\int_0^b c'\,d(b^2)\approx\frac{2\,c'_0}{h}\left(\frac{e^{h\,b}-1}{h}-b\right)+\frac{2\,a}{h}\left[b\left(b+\frac{2}{h}\right)-2\,\frac{e^{h\,b}-1}{h^2}\right]+2\,a\,v\int_0^b e^{h\,b}\left(\int_0^b e^{-h\,b}\,b\,\frac{db}{c'}\right)db\,.$$

Der Reibungsverlust innerhalb des Gemisches ergibt sich aus (8b) zu

$$R=\frac{G}{2\,b_e\,w_f^2}\left[v^3\int_0^b\frac{d(b^2)}{c'}-3\,v^2\,b^2+3\,v\int_0^b c'\,d(b^2)-\int_0^b c'^2\,d(b^2)\right] \tag{21}$$

und der Stoßverlust aus (17) zu

$$S=\frac{G}{2g\,b_e}\left(\int_0^b c'^2\,db-2\,c'_0\int_0^b c'\,db+c'^2_0\,b\right). \tag{22}$$

---

[1] Es ist $d(c'^2)/db = 2\,d^2b/dt^2$. Die dafür erhaltene Gleichung integriert man nach *Lagranges* Methode der Variation der Konstanten und erhält

$$c'\approx\frac{2\,a}{b\,h}\left(b+\frac{1}{h}\right)-\frac{c'_0}{b\,h}+\frac{a\,v}{b}\,e^{h\,b}\int_0^b b\,e^{-h\,b}\,dt+\frac{C}{b}\,e^{h\,b}\,,$$

worin $C$ die Integrationskonstante bedeutet. Nach der Anfangsbedingung ist $c' = c'_0$ und $\int dt = 0$ für $b = 0$. Multipliziert man die Gleichung mit $b$, so kann man daraus $C = c'_0/h - 2a/h^2$ bestimmen.

In Abb. 4 sind die Gutgeschwindigkeit $c'$ und der Druckverlauf $P$, berechnet nach (19) und (20), für Weizen bei denselben Annahmen wie für Abb. 1 für eine Länge der Aufgabestelle $b_e = 0{,}3$ m dargestellt.

Die für das Ende der Aufgabestelle erhaltenen Werte sind die Ausgangswerte $c_0$ usw. für die anschließende Rohrstrecke.

Die vorstehenden Ausführungen sollen da von Nutzen sein, wo man für eine Förderleitung den Leistungsbedarf und die Abmessungen berechnen will bei gegebener Menge von Fördergut

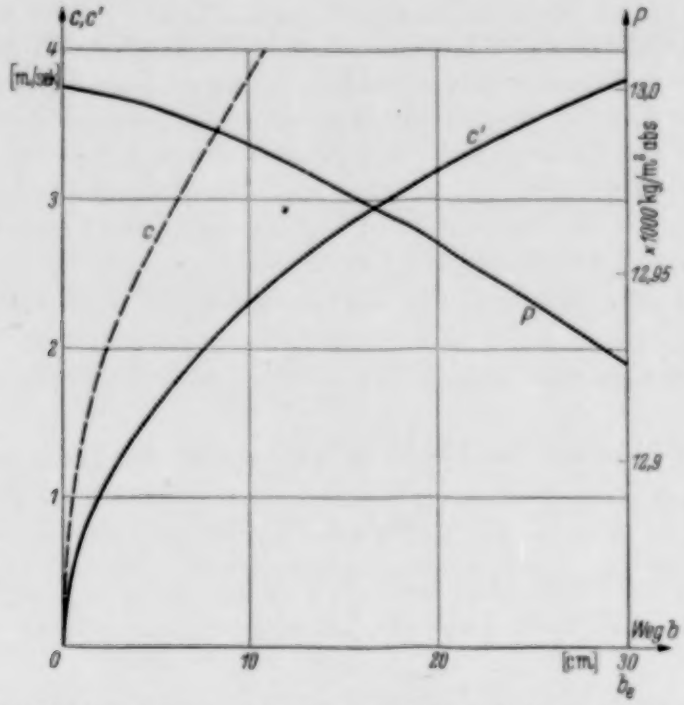


Abb. 4. Zunahme der Gutgeschwindigkeit $c'$ und Druckverlauf $P$ während der Aufgabe von Weizen ins Rohr bei denselben Annahmen wie für Abb. 1. Die Aufgabestelle sei ausgeführt, wie in Abb. 3 dargestellt, und habe eine Länge von $b_e = 0{,}3$ m. Zum Vergleich ist die Gutgeschwindigkeit $c$ aus Abb. 1 gestrichelt eingezeichnet. $c'_0 = 0$.

und Luft. Außerdem geben sie bei der Messung und Regelung der Gutbeladung durch den Druckabfall einen Anhalt dafür, wie lang die dazu nötige verengte Rohrstrecke sein muß. Wie verschieden diese Länge sein kann, ersieht man aus einem Vergleich der beiden Schaubilder für Weizen und Kohlenstaub. Dieser führt zu dem Gedanken, durch eine solche Messung des Druckunterschiedes an einer verengten kurzen Rohrstrecke, die von einem Gemisch von Gas und Flüssigkeitströpfchen durchströmt wird, die Größe der Tröpfchen ungefähr angeben zu können, wenn die Mengen von Gas und Flüssigkeit gegeben sind.

(Eingegangen am 1. Februar 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Horst Hesse*, Köln-Flittard, Leverkusener Straße 122II.

# Einflußflächen für die am bogenförmigen Rand eingespannte und am geraden Rand freie Halbkreisplatte

Von H. Müggenburg

**1. Einleitung.** Die Halbkreisplatte ist eine von den Plattenformen, die einer Berechnung auch bei verschieden gelagerten Rändern mit verhältnismäßig geringem Aufwand zugänglich ist. Die Berechnung vereinfacht sich für jene Stützungsarten des geraden Randes, für die man Funktionen finden kann, die die Bedingungen am geraden Rand schon erfüllen. Das ist u. a. dann möglich, wenn der gerade Rand frei ist, welcher Fall hier behandelt wird.

Es sei vorausgesetzt, daß die Platte isotrop und homogen, die Plattenstärke $h$ klein gegenüber den übrigen Abmessungen, die Durchbiegung $w$ klein gegenüber der Plattenstärke und das *Hooke*sche Gesetz gültig sei. Wenn $E$ den Elastizitätsmodul und $\mu$ die Querdehnungszahl bedeuten, ist

$$N = \frac{E h^3}{12\,(1-\mu^2)}$$

die Plattensteifigkeit. Die elastische Fläche $w$ wird durch die Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w(x, y) = \frac{p(x, y)}{N}$$

bestimmt, in der $p(x, y)$ die Flächenlast bedeutet. Wirkt nur die Einzellast $P = 1$ an der Stelle $x_0$, $y_0$, dem sogenannten Aufpunkt (Abb. 1), ist also $p(x, y) = 0$, so sei $G(x_0, y_0; x, y)$ die zur

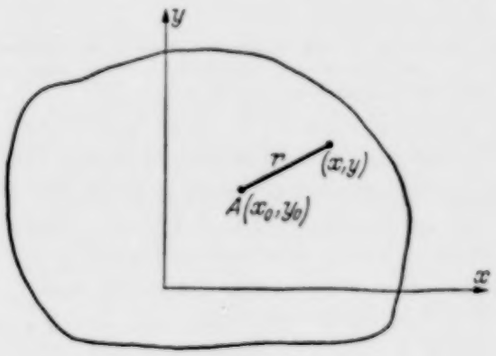


Abb. 1.

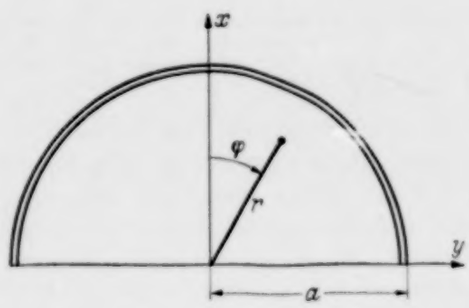


Abb. 2.

Einzellast gehörige Biegefläche. Nach dem *Maxwell*schen Reziprozitätssatz ist die von der an der Stelle $x_0$, $y_0$ wirkenden Einzellast $P = 1$ hervorgerufene Biegefläche die Biegeeinflußfläche für den Punkt $x_0$, $y_0$ und zwar für die gleichen Randbedingungen.

Die Funktion $G(x_0, y_0; x, y)$ setzt sich zusammen aus einem im Aufpunkt singulären Anteil $G_0$ und einem regulären Anteil $G_1$, der die Randbedingungen der Platte zu erfüllen hat[1]:

$$G(x_0, y_0; x, y) = G_0(x_0, y_0; x, y) + G_1(x_0, y_0; x, y)\,. \tag{1}$$

Die Einflußflächen für die Schnittgrößen erhält man, wenn man die Biegeeinflußfläche nach den Aufpunktskoordinaten $x_0$, $y_0$ differentiiert. Der Regulärantеil, der ein Integral der Differentialgleichung $\Delta\Delta G_1 = 0$ sein muß, hat die gleichen Randbedingungen zu erfüllen wie die Biegeeinflußfläche[2].

Bei der vorliegenden Platte mit einem freien Rand werden die Regulärteile so gewählt, daß sie von vornherein die Bedingungen des freien Randes erfüllen, daß also das Moment

$$m_x = -N\left[\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2}\right] = 0 \tag{2}$$

[1] *Ph. Frank* und *R. v. Mises*, Differentialgleichungen der Physik, Bd. I, S. 631 ff., Braunschweig 1925.
[2] *A. Pucher*, Ing.-Arch. 12 (1941) S. 76.

und die Stützkraft

$$c_x = -N\left[\frac{\partial^3 G_1}{\partial x^3} + (2-\mu)\,\frac{\partial^3 G_1}{\partial x\,\partial y^2}\right] = 0 \tag{3}$$

am Rand $x = 0$ sind, wenn die $y$-Achse den freien Rand bildet (Abb. 2). Auch die Singulärteile erfüllen die Bedingungen des freien Randes, da sie mit (2) und (3) hergeleitet werden[1]. Die Einflußflächen werden für die Querkontraktionszahl $\mu = 0{,}3$ berechnet.

**2. Biegeeinflußfläche.** Der Aufpunkt liegt in der Mitte des geraden freien Randes, der Koordinatenursprung im Aufpunkt (Abb. 2). Die Biegeeinflußfläche ist symmetrisch zur $x$-Achse. Deshalb braucht nur eine Plattenhälfte betrachtet zu werden. Der Singulärteil lautet in Polarkoordinaten (Abb. 2)[2]

$$G_0(r,\varphi) = \frac{r^2}{2\,(3+\mu)\,\pi\,N}\left[\ln\frac{r}{a} + \frac{1+\mu}{1-\mu}\left(\varphi\sin 2\varphi - \cos 2\varphi\ln\frac{r}{a}\right) + \frac{1}{1+\mu}\right]. \tag{4}$$

Führt man mit dem Plattenhalbmesser $a$ die dimensionslose Variable $\varrho = r/a$ ein, so wird

$$G_0(\varrho,\varphi) = \frac{a^2\,\varrho^2}{2\,(3+\mu)\,\pi\,N}\left[\ln\varrho + \frac{1+\mu}{1-\mu}(\varphi\sin 2\varphi - \cos 2\varphi\ln\varrho) + \frac{1}{1+\mu}\right]. \tag{5}$$

Die Beziehungen zu den kartesischen Koordinaten lauten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Der Regulärteil $G_1$ wird gebildet aus einer Summe von biharmonischen Funktionen $v_n$:

$$G_1 = \sum c_n v_n\,, \tag{6}$$

wo $c_n$ Freiwerte sind. Da die Funktionen $v_n$ schon den Bedingungen des freien Randes genügen sollen, braucht nur noch der eingespannte Rand erfüllt zu werden. Das geschieht punktweise mittels der Konstanten $c_n$. In diskreten Punkten müssen Wert und Neigung der Einflußfläche Null sein:

$$[G]_{\varrho=1} = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial G}{\partial r}\right]_{\varrho=1} = 0\,. \tag{7}$$

Diese Bedingungen werden hier erfüllt für $\varphi = 0°$, $18°$, $36°$, $54°$, $72°$ und $90°$. Als weitere Bedingung wird für $\varphi = 90°$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{\varrho=1} = 0 \tag{8}$$

eingeführt, womit der Randverlauf der Einflußfläche in diesem Punkt eine horizontale Tangente erhält. Dadurch werden die Bedingungen an den Ecken der Zweieckplatte streng erfüllt. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß dies wesentlich ist[3]. Da in jedem der vorgesehenen Punkte zwei Randbedingungen streng erfüllt werden und für die Eckpunkte je die zusätzliche Bedingung (8) bestehen soll, ist ein lineares Gleichungssystem mit 13 Unbekannten zu lösen.

Die Funktionen $v^n$ werden so gebildet, daß sie zur $x$-Achse symmetrisch sind und den Bedingungen

$$\left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}\right]_{x=0} = 0\,, \tag{9}$$

$$\left[\frac{\partial^3 v_n}{\partial x^3} + (2-\mu)\,\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0} = 0 \tag{10}$$

genügen. Sie werden zusammengesetzt aus je einem harmonischen Polynom $P_n$ und einem biharmonischem Polynom $B_n$.

Man erhält

$$v_n = P_n + z_n B_n\,, \tag{11}$$

wo $z_n$ einen Freiwert bedeutet. Die harmonischen Funktionen $P_n$ sind Realteile der komplexen Funktionen

$$\zeta^n = (x + i\,y)^n,$$

während die biharmonischen Funktionen $B_n$ die sogenannten normierten Polynome sind[4]. Der Faktor $z_n$ wird so bestimmt, daß $v_n$ für gerades $n$ der Gleichung (9) und für ungerades $n$ der Gleichung (10) genügt.

---

[1] *A. Scherer*, Allgem. Herleitung singulärer Lösungen der biharmonischen Gleichung, sowie Aufstellung *Green*scher Funktionen am Beispiel einer Dreiecksplatte mit freiem Rand, Diss. Aachen 1955.

[2] *A. Nádai*, Die elastischen Platten, Berlin 1925.

[3] *F. Schultz-Grunow*, Z. angew. Math. Mech. 33 (1953) S. 227.

[4] *K. Zweiling*, Grundlage einer Theorie der biharmonischen Polynome, Berlin 1952.

Für gerades $n$ wird nach Einsetzen in (9)

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2}\right]_{x=0}+z_n\left[\frac{\partial^2 B_n}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 B_n}{\partial y^2}\right]_{x=0}&=0\,,\\ z_n=-\frac{\left[\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2}\right]_{x=0}}{\left[\frac{\partial^2 B_n}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 B_n}{\partial y^2}\right]_{x=0}}&\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

erhalten und für ungerades $n$ nach Einsetzen in (10)

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial^3 P_n}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial P^3{}_n}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0}+z_n\left[\frac{\partial^3 B_n}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 B_n}{\partial x\,\partial x^2}\right]_{x=0}&=0\,,\\ z_n=-\frac{\left[\frac{\partial^3 P_n}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 P_n}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0}}{\left[\frac{\partial^3 B_n}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 B_n}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0}}&\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

Dabei erfüllt dann $v_n$ bei geradem $n$ auch die Gleichung (10) und entsprechend bei ungeradem $n$ auch (9), wie folgendes Beispiel zeigt: $v_4$ wird zusammengesetzt aus $P_4 = x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4$ und $B_4 = x^4 - 3\,x^2\,y^2$. Unter Berücksichtigung von (12) wird

$$z_n = -\frac{-12y^2(1-\mu)}{-6y^2} = -2(1-\mu)\,.\tag{14}$$

Man erhält so

$$v_4 = (x^4 - 6\,x^2\,y^2 + y^4) - 2(1-\mu)(x^4 - 3\,x^2\,y^2) = -(1-2\mu)\,x^4 - 6\,\mu\,x^2\,y^2 + y^4.\tag{15}$$

Setzt man nun $v_4$ in (10) ein, so ergibt sich, wie behauptet,

$$\left[\frac{\partial^3 v_4}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 v_4}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0}=0\,.\tag{16}$$

Die Funktionen $v_n$ lassen sich komplex ausdrücken mit $\zeta^n = (x + i\,y)^n$. Für gerades $n$ gilt

$$v_n = Re\,\zeta^n - \frac{n}{2}(1-\mu)\,Re\,\zeta\,Re\,\zeta^{n-1}\tag{17}$$

oder in Polarkoordinaten mit dem dimensionslosen Halbmesser $\varrho$

$$v_n = \varrho^n\left[\cos n\varphi - \frac{n}{2}(1-\mu)\cos\varphi\cos(n-1)\varphi\right].\tag{18}$$

Für ungerades $n$ hat man

$$v_n = \frac{1+\mu}{2}\,Re\,\zeta^n + \frac{n}{2}(1-\mu)\,Re\,\zeta\,Re\,\zeta^{n-1}\tag{19}$$

bzw.

$$v_n = \varrho^n\left[\frac{1+\mu}{2}\cos n\varphi + \frac{n}{2}(1-\mu)\cos\varphi\cos(n-1)\varphi\right].\tag{20}$$

Im Einzelnen wird

$$\left.\begin{aligned}v_0&=1\,,\\ v_1&=\varrho\cos\varphi\,,\\ v_2&=\varrho^2\left[\cos 2\varphi-(1-\mu)\cos^2\varphi\right],\\ v_3&=\varrho^3\left[\frac{1+\mu}{2}\cos 3\varphi+\frac{3}{2}(1-\mu)\cos\varphi\cos 2\varphi\right],\\ v_4&=\varrho^4\left[\cos 4\varphi-2(1-\mu)\cos\varphi\cos 3\varphi\right]\quad\text{usw.}\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

Die Einflußfläche bekommt nun die Form

$$G(0,0;\varrho,\varphi)=\frac{a^2}{2(3+\mu)\pi N}\left\{\varrho^2\left[\ln\varrho+\frac{1+\mu}{1-\mu}(\varphi\sin 2\varphi-\cos 2\varphi\ln\varphi)+\frac{1}{1+\mu}\right]+\sum_n{}' c_n v_n\right\}.\tag{22}$$

Da 13 Bedingungen zu befriedigen sind, läuft in (22) $n$ von 0 bis $n=12$. Die Auflösung der 13 Bedingungsgleichungen liefert

$$\begin{aligned} c_0 &= \phantom{-}1{,}7876274, & c_7 &= \phantom{-}0{,}0129321,\\ c_1 &= -3{,}9866612, & c_8 &= \phantom{-}0{,}0020971,\\ c_2 &= \phantom{-}2{,}8091287, & c_9 &= -0{,}0128670,\\ c_3 &= \phantom{-}0{,}4260921, & c_{10} &= -0{,}0078559,\\ c_4 &= \phantom{-}0{,}1942653, & c_{11} &= \phantom{-}0{,}0101417,\\ c_5 &= -0{,}0503123, & c_{12} &= \phantom{-}0{,}0103238.\\ c_6 &= -0{,}0377284, \end{aligned}$$

Nun ist die Biegeeinflußfläche, die in der Abb. 3 im Schrägbild und in der Abb. 4 durch einen Höhenschichtplan dargestellt ist, in dem die Höhen mit $2(3+\mu)\pi N/a^2$ vervielfacht sind, durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2(3+\mu)\pi N}{a^2}\,G(0,0;\varrho,\varphi) = \varrho^2\left[\ln\varrho + \frac{1+\mu}{1-\mu}(\varphi\sin 2\varphi - \cos 2\varphi\ln\varrho) + \frac{1}{1+\mu}\right] + 1{,}7876274\\ - 3{,}9866612\,v_1 + 2{,}8091287\,v_2 + 0{,}4260921\,v_3\\ + 0{,}1942653\,v_4 - 0{,}0503123\,v_5 - 0{,}0377284\,v_6\\ + 0{,}0129321\,v_7 + 0{,}0020971\,v_8 - 0{,}0128670\,v_9\\ - 0{,}0078559\,v_{10} + 0{,}0101417\,v_{11} + 0{,}0103238\,v_{12}\,. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

In Abb. 4 liest man den größten Wert $1{,}7876274\ a^2/2(3+\mu)\pi N$ ab.

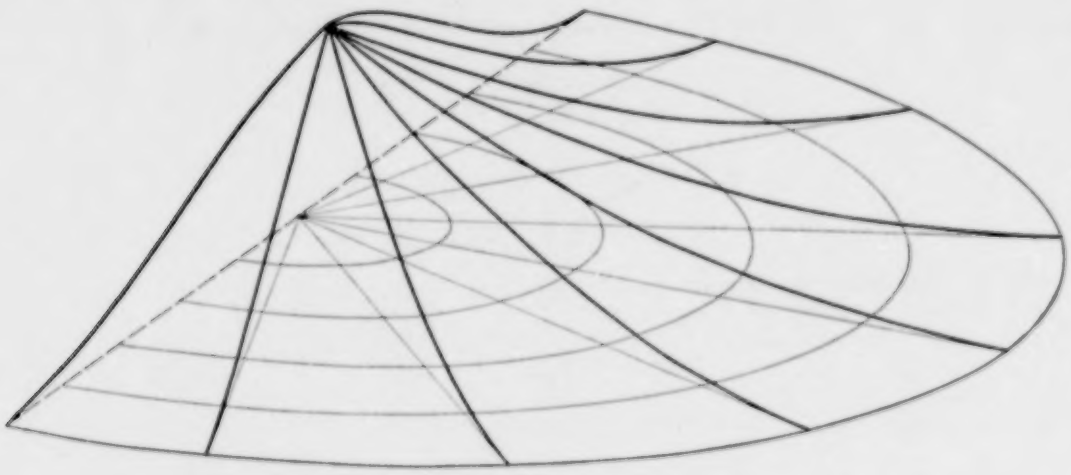

Abb. 3.

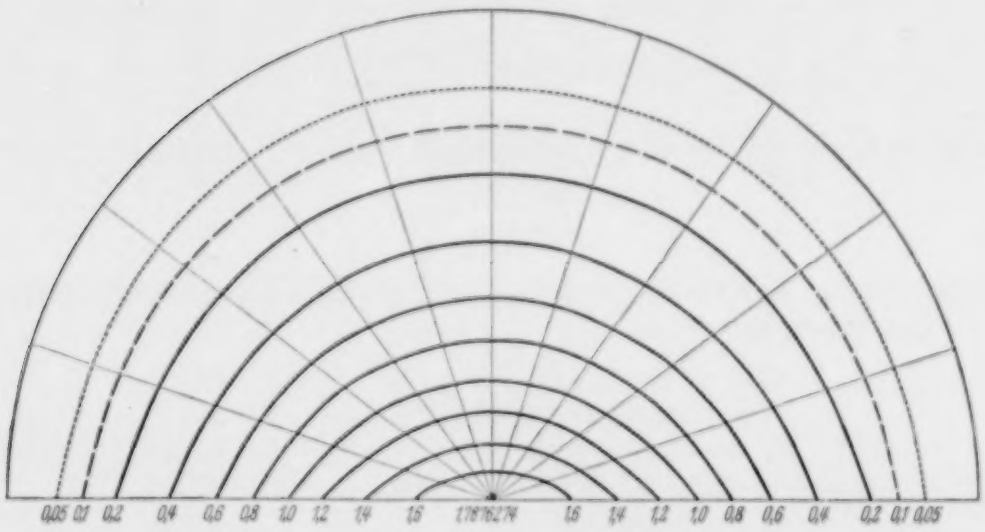


Abb. 4.

**3. Einflußfläche des Biegemomentes $m_y$.** Die Einflußfläche des Biegemomentes $m_y$ im Schnitt $y=$ konst. wird ebenfalls für den Aufpunkt 0,0 ermittelt (Abb. 2). Sie hat die gleiche Symmetrie- und die gleichen Randbedingungen wie die Biege-Einflußfläche. Als Regulärteil $G_1$ kann daher

dieselbe Funktionenreihe

$$G_1 = \sum_n a_n v_n \tag{24}$$

wie bei der Biegeeinflußfläche verwendet werden. Die Singularität für das Biegemoment $m_{0y}$ für den Schnitt $y =$ konst. am freien Rand lautet[1]

$$m_{0y} = \frac{1+\mu}{(3+\mu)\pi}\left[\ln\left(\frac{r}{a}\right)^2 - (1-\mu)\frac{x^2}{r^2}\right] \tag{25}$$

oder in Polarkoordinaten (Abb. 2)

$$m_{0y} = \frac{1+\mu}{(3+\mu)\pi}\left[\ln\left(\frac{r}{a}\right)^2 - (1-\mu)\cos^2\varphi\right]. \tag{26}$$

Man erhält (25), wenn man den Singulärteil der Biegeeinflußfläche

$$\left.\begin{aligned}\overline{G_0}(x_0, y_0; x, y) = \frac{r^2}{2(3+\mu)\pi N}\Bigg[&\ln\frac{r}{a} + \frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\left[(y-y_0)^2 - (x+x_0)^2\right]\ln\frac{r}{a}\right.\\ &\left.-2(x+x_0)(y-y_0)\operatorname{arc\,tg}\frac{y-y_0}{x+x_0}\right] + \frac{1}{1+\mu}\Bigg]\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

mit $r^2 = (x+x_0)^2 + (y-y_0)^2$ für den Aufpunkt $x_0$, $y_0$ in die Differentialbeziehung

$$m_{0y} = -N\left(\frac{\partial^2\overline{G_0}}{\partial y_0^2} + \mu\frac{\partial^2\overline{G_0}}{\partial x_0^2}\right) \tag{28}$$

einsetzt. Da am freien Rand das Moment $m_{0x}$ verschwinden muß (Abb. 2), gilt

$$m_{0x} = -N\left(\frac{\partial^2\overline{G_0}}{\partial x_0^2} + \mu\frac{\partial^2\overline{G_0}}{\partial y_0^2}\right) = 0 \tag{29}$$

oder

$$\frac{\partial^2\overline{G_0}}{\partial x_0^2} = -\mu\frac{\partial^2\overline{G_0}}{\partial y_0^2}. \tag{30}$$

Setzt man (30) in (28) ein, so erhält man[2]

$$m_{0y} = -(1-\mu^2)\frac{\partial^2\overline{G_0}}{\partial y_0^2}. \tag{31}$$

Die Momenteneinflußfläche $m_y$ formuliert sich somit zu

$$m_y(0, 0; \varrho, \varphi) = \frac{1+\mu}{(3+\mu)\pi}\left\{\left[\ln\left(\frac{r}{a}\right)^2 - (1-\mu)\cos^2\varphi\right] + \sum_{n=0}^{n=12} a_n v_n\right\}. \tag{32}$$

Die Freiwerte $a_n$ werden so bestimmt, daß die Bedingungen des eingespannten Randes

$$[m_y]_{\varrho=1} = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial m_y}{\partial r}\right]_{\varrho=1} = 0 \tag{33}$$

in denselben Punkten wie bei der Biegeeinflußfläche und die Bedingung

$$\left[\frac{\partial m_y}{\partial x}\right]_{\varrho=1} = 0 \tag{34}$$

für $\varphi = 90°$ erfüllt werden, so daß wieder ein Gleichungssystem mit 13 Gleichungen zu lösen ist. Die Konstanten $a_n$ ergeben sich zu

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_0$ | $= -0{,}8688154$, | $a_7$ | $= -0{,}0022810$, |
| $a_1$ | $= \phantom{-}0{,}7351904$, | $a_8$ | $= -0{,}0030799$, |
| $a_2$ | $= -2{,}0683212$, | $a_9$ | $= \phantom{-}0{,}0061746$, |
| $a_3$ | $= \phantom{-}0{,}3138062$, | $a_{10}$ | $= \phantom{-}0{,}0097565$, |
| $a_4$ | $= -0{,}4661287$, | $a_{11}$ | $= -0{,}0025074$, |
| $a_5$ | $= \phantom{-}0{,}0214218$, | $a_{12}$ | $= -0{,}0044466$. |
| $a_6$ | $= \phantom{-}0{,}0160941$, | | |

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 309.
[2] Siehe Fußnote 1 von S. 309.

Die Momenteneinflußfläche $m_y$, die in der Abb. 5 als Schrägbild und in der Abb. 6 durch Höhenlinien dargestellt ist, wobei die Höhen mit $(3+\mu)\pi/(1+\mu)$ vervielfacht sind, nimmt folgende Form an:

$$\begin{aligned}\frac{(3+\mu)\pi}{1+\mu}\, m_y(0,0;\varrho,\varphi) = &\left[\ln\left(\frac{r}{a}\right)^2 - (1-\mu)\cos^2\varphi\right] - 0{,}8688154 + 0{,}7351004\, v_1\\ &- 2{,}0683212\, v_2 + 0{,}3138062\, v_3 - 0{,}4661287\, v_4\\ &+ 0{,}0214218\, v_5 + 0{,}0160941\, v_6 - 0{,}0022810\, v_7\\ &- 0{,}0030799\, v_8 + 0{,}0061746\, v_9 + 0{,}0097565\, v_{10}\\ &- 0{,}0025074\, v_{11} - 0{,}0044466\, v_{12}.\end{aligned} \qquad (35)$$

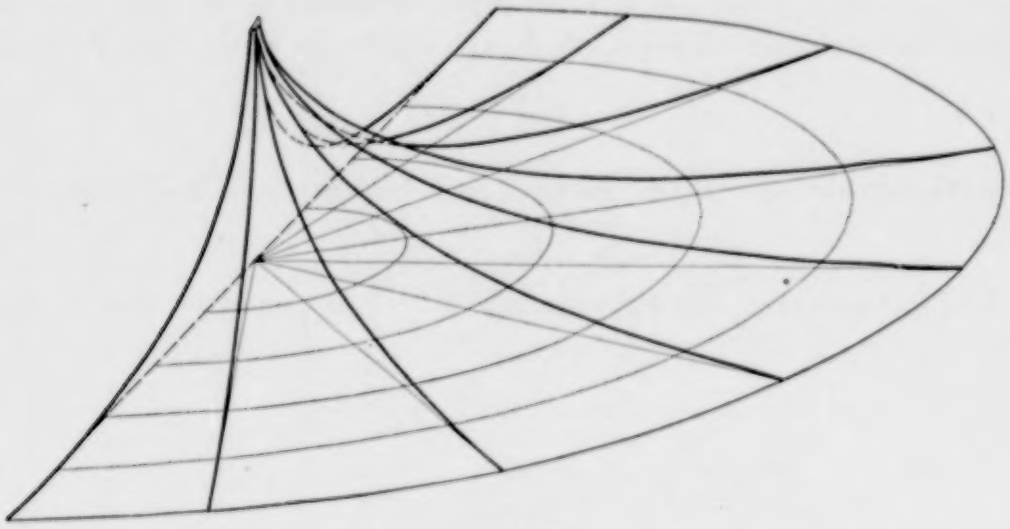

Abb. 5.

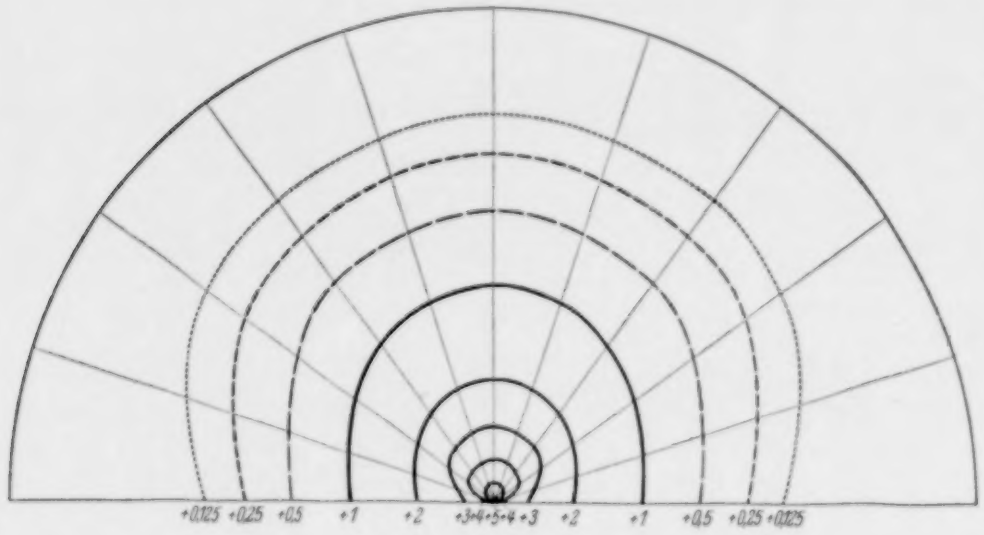


Abb. 6.

**4. Einflußfläche der Querkraft $q_y$.** Der Singulärteil $q_{0y}$ der Querkrafteinflußfläche $q_y$ für den Aufpunkt $0, y_0$ am freien Rand $x = 0$ wird ermittelt mittels der Beziehung[1]

$$q_{0y} = -N\left(\frac{\partial^3 \overline{G_0}}{\partial y_0^3} + \frac{\partial^3 \overline{G_0}}{\partial x_0^2\, \partial y_0}\right). \qquad (36)$$

Da die Stützkraft

$$c_x = -N\left[\frac{\partial^3 \overline{G_0}}{\partial x_0^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 \overline{G_0}}{\partial x_0\, \partial y_0^2}\right]_{x=0} = 0 \qquad (37)$$

am freien Rand oder

$$\frac{\partial^3 G_0}{\partial x_0^3} = -(2-\mu)\frac{\partial^3 G_0}{\partial x_0\, \partial y_0^2} \qquad (38)$$

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 309.

ist, wird, wenn man (38) in (36) einsetzt,

$$q_{0y} = N\left[(1-\mu)\frac{\partial^3 \overline{G_0}}{\partial y_0^3}\right] = \frac{2}{(3+\mu)\pi}\left[\frac{y-y_0}{r^2} + (1-\mu)\frac{(y-y_0)\,x^2}{r^4}\right] \tag{39}$$

mit $r^2 = (y-y_0)^2 + x^2$.

In Polarkoordinaten mit $\varrho$ wird (Abb. 2)

$$q_{0y} = \frac{2}{(3+\mu)\pi}\left[\frac{\sin\varphi}{\varrho} + (1-\mu)\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{\varrho}\right]. \tag{40}$$

Die Einflußfläche der Querkraft $q_y$ wird ermittelt für den Aufpunkt 0,0 (Abb. 2). Sie ist antimetrisch zur $x$-Achse. Der Regulärteil muß daher im Gegensatz zu den Biege- und Momenteneinflußflächen aus Funktionen bestehen, die antimetrisch zur $x$-Achse sind. Diese Funktionen $f_n$ werden wieder zusammengesetzt aus je einer Bipotentialfunktion $\overline{B}_n$ und einer Potentialfunktion $\overline{P}_n$, wobei die Potentialfunktionen $\overline{P}_n$ Imaginärteile der komplexen Funktionen

$$\bar{\zeta}^n = \frac{1}{n}(x+iy)^n$$

und die Bipotentialfunktionen $\overline{B}_n$ die normierten Polynome sind. Man erhält

$$f_n = \overline{P}_n + \bar{z}_n\,\overline{B}_n\,, \tag{41}$$

wo $\bar{z}_n$ einen Freiwert bedeutet. Die Funktionen $f_n$ werden so aufgestellt, daß sie die Differentialbeziehungen

$$\left[\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}\right]_{x=0} = 0 \tag{42}$$

und

$$\left[\frac{\partial^3 f_n}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 f_n}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0} = 0 \tag{43}$$

erfüllen. Das wird erreicht, indem man für gerades $n$ $f_n$ in (43) und für ungerades $n$ in (42) einsetzt. Man erhält folgende Bestimmungsgleichungen für $\bar{z}_n$:

Für gerades $n$

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial^3 \overline{P}_n}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 \overline{P}_n}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0} + \bar{z}_n\left[\frac{\partial^3 \overline{B}_n}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 \overline{B}_n}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0} &= 0\,,\\ \bar{z}_n = -\frac{\left[\frac{\partial^3 \overline{P}_n}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 \overline{P}_n}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0}}{\left[\frac{\partial^3 \overline{B}_n}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 \overline{B}_n}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=0}}&,\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

für ungerades $n$

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2 \overline{P}_n}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 \overline{P}_n}{\partial y^2}\right]_{x=0} + \bar{z}_n\left[\frac{\partial^2 \overline{B}_n}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 \overline{B}_n}{\partial y^2}\right]_{x=0} &= 0\,,\\ \bar{z}_n = -\frac{\left[\frac{\partial^2 \overline{P}_n}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 \overline{P}_n}{\partial y^2}\right]_{x=0}}{\left[\frac{\partial^2 \overline{B}_n}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 \overline{B}_n}{\partial y^2}\right]_{x=0}}&.\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Bei geradem $n$ erfüllen die Funktionen $f_n$ ebenso die Bedingung (42), wie auch bei ungeradem $n$ die Funktionen $f_n$ die Gleichung (43) befriedigen, was sich in ähnlicher Weise wie bei der Biegeeinflußfläche nachprüfen läßt. Nachdem $\bar{z}_n$ ermittelt ist, wird nun mit $\zeta^n = (x+iy)^n$ für gerades $n$

$$f_n = \frac{1+\mu}{2n}\,Im\;\zeta^n + \frac{1-\mu}{2}\,Re\;\zeta\;Im\;\zeta^{n-1} \tag{46}$$

bzw. in Polarkoordinaten mit $\varrho$

$$f_n = \varrho^n\left[\frac{1+\mu}{2n}\sin n\varphi + \frac{1-\mu}{2}\cos\varphi\sin(n-1)\varphi\right], \tag{47}$$

für ungerades $n$

$$f_n = \frac{1}{n}\,Im\;\zeta^n - \frac{1-\mu}{2}\,Re\;\zeta\;Im\;\zeta^{n-1} \tag{48}$$

bzw.

$$f_n = \varrho^n \left[ \frac{1}{n} \sin\varphi - \frac{1-\mu}{2} \cos\varphi \sin(n-1)\varphi \right]. \tag{49}$$

Beispielsweise lauten die ersten vier Funktionen

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \varrho \sin\varphi\,, \\ f_2 &= \varrho^2 (\sin\varphi \cos\varphi)\,, \\ f_3 &= \varrho^3 \left( \frac{1}{3} \sin 3\varphi - \frac{1-\mu}{2} \cos\varphi \sin 2\varphi \right), \\ f_4 &= \varrho^4 \left( \frac{1+\mu}{8} \sin 4\varphi + \frac{1-\mu}{2} \cos\varphi \sin 3\varphi \right). \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

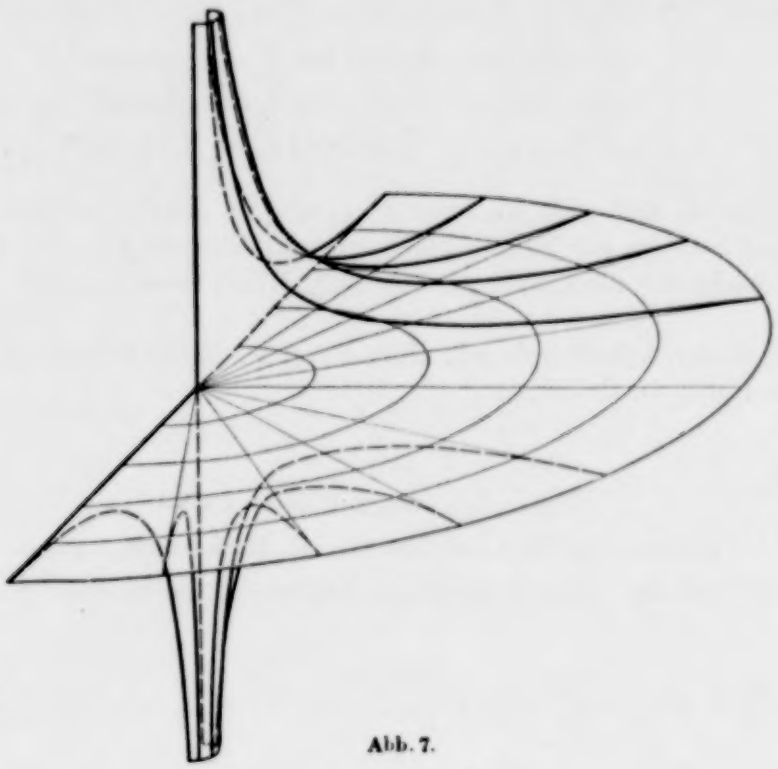

Abb. 7.

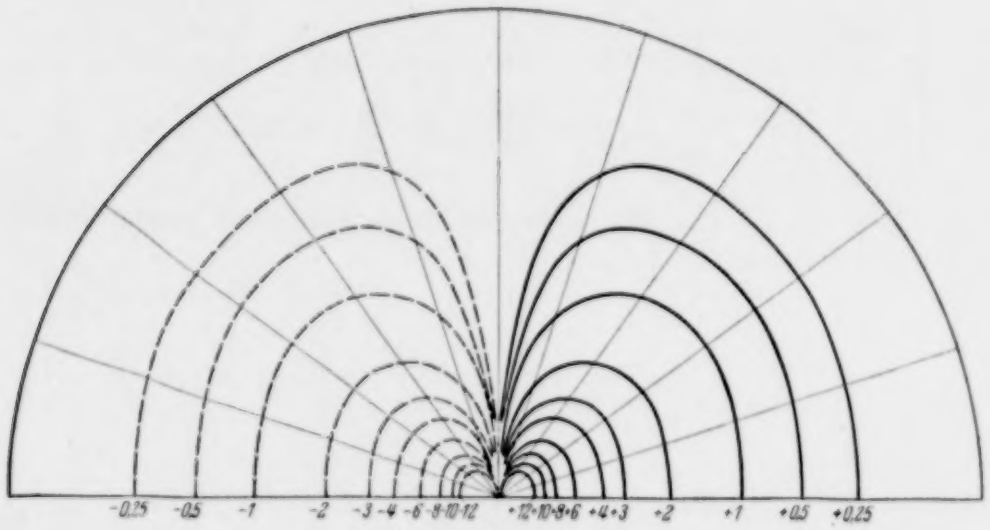


Abb. 8.

Für die Einflußfläche $q_y$ hat man nun den Ausdruck

$$q_y(0, 0; \varrho, \varphi) = \frac{2}{a(3+\mu)\pi} \left\{ \frac{1}{\varrho} \left[ \sin\varphi + (1-\mu) \sin\varphi \cos^2\varphi \right] + \sum_{n=1}^{n=11} b_n f_n \right\}. \tag{51}$$

Die Konstanten $b_n$ werden so bestimmt, daß die Randbedingungen in denselben Punkten erfüllt werden wie bei der Biege- und Momenteneinflußfläche. Nun befriedigt aber bereits $q_y(0, 0; \varrho, \varphi)$

die Randbedingungen im Punkt $\varphi = 0$ (Abb. 2), so daß nur noch 11 Konstante $b_n$ ermittelt werden müssen. Die Auflösung der 11 Gleichungen ergibt folgende Werte $b_n$:

$$\begin{aligned} b_1 &= \pm\, 2{,}4747744, & b_7 &= -\,0{,}0642880,\\ b_2 &= -\,0{,}6733905, & b_8 &= -\,0{,}0166327,\\ b_3 &= \phantom{-}\,5{,}6692867, & b_9 &= \phantom{-}\,0{,}0538504,\\ b_4 &= -\,0{,}6405446, & b_{10} &= -\,0{,}0157249,\\ b_5 &= \phantom{-}\,1{,}9347084, & b_{11} &= -\,0{,}1416655.\\ b_6 &= \phantom{-}\,0{,}0319381, \end{aligned}$$

Die Einflußfläche $q_y$, die die Abb. 7 als Schrägbild und die Abb. 8 im Höhenlinienplan zeigt, in dem die Höhen mit $\frac{1}{2}\,a(3+\mu)\pi$ vervielfacht sind, formuliert sich endgültig zu

$$\left.\begin{aligned} \frac{a(3+\mu)\pi}{2}\, q_y(0,0;\varrho,\varphi) = {} & \frac{1}{\varrho}\left[\sin\varphi + (1-\mu)\sin\varphi\cos^2\varphi\right] + 2{,}4747744\, f_1 - 0{,}6733905\, f_2\\ & + 5{,}6692867\, f_3 - 0{,}6405446\, f_4 + 1{,}9347084\, f_5\\ & + 0{,}0319381\, f_6 - 0{,}0642880\, f_7 - 0{,}0166327\, f_8\\ & + 0{,}0538504\, f_9 - 0{,}0157249\, f_{10} - 0{,}1416655\, f_{11}\,. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Die Rechnung hat gezeigt, daß zwischen den Punkten, in denen die Randbedingungen streng erfüllt sind, die Abweichungen der Einflußflächen vom Sollbetrag gering sind. So beträgt z. B. bei der Biegeeinflußfläche die maximale Abweichung 1,71% bezogen auf den größten Wert der Einflußfläche.

Die Anregung zu dieser Arbeit gab mit Herr Prof. *F. Schultz-Grunow*. Ihm möchte ich an dieser Stelle meinen Dank ausdrücken.

(Eingegangen am 3. Februar 1956.)

Institut für Mechanik der Techn. Hochschule Aachen.

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Hans Müggenburg*, Aachen, Techn. Hochschule, Institut für Mechanik.

# Eigenvibrations of Curved Elastic Bars According to the „Method of Internal Constraints“*

By E. Volterra

**1. Introduction.** In a previous paper[1] the following equations of motion were obtained for a curved bar of length $L$, of curvature $c$ and radii of inertia $r_y$, $r_z$:

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+2G)\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial x^2}-G\,\lambda_x+(\lambda+2G)\,r_z^2\,c\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}-(\lambda+3G)\,c\,r_z^2\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}-G\frac{\partial v_y}{\partial x}-Gc\,v_x\\
&\qquad=\varrho\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial t^2}-\varrho\,r_z^2\,c\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2},\\
&G\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+G\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}+(\lambda+3G)\,c\frac{\partial v_x}{\partial x}+\lambda\,c\,\mu_z+G\,c\,\lambda_y+G\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial x^2}=\varrho\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2}-\varrho\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial t^2},\\
&G\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial x^2}-(\lambda+2G)\,\lambda_y-\lambda\frac{\partial v_x}{\partial x}-\lambda\,\mu_z+(\lambda+3G)\,c\,r_z^2\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}+\lambda\,c\,v_y+G\,r_z^2\,c\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}\\
&\qquad=\varrho\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial t^2}-\varrho\,r_z^2\,c\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2},\\
&G\,r_y^2\frac{\partial^2\mu_z}{\partial x^2}-\lambda\,\lambda_y-(\lambda+2G)\,\mu_z-\lambda\frac{\partial v_x}{\partial x}+\lambda\,c\,v_y=r_y^2\,\varrho\frac{\partial^2\mu_z}{\partial t^2},\\
&(\lambda+2G)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\mu_z}{\partial x}+(\lambda+2G)\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial x^2}-G\,c\frac{\partial v_y}{\partial x}-(\lambda+2G)\,c\frac{\partial v_y}{\partial x}-Gc\,\lambda_x\\
&\qquad=\varrho\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}-\varrho\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

and

$$\left.\begin{aligned}
&G\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_z}{\partial x^2}+G\,r_z^2\,c\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}-G\,\lambda_z-G\,\mu_y=\varrho\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_z}{\partial t^2}-r_z^2\,\varrho\,c\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2},\\
&G\,r_y^2\frac{\partial^2\mu_y}{\partial x^2}-G\,\mu_y-G\,\lambda_z+(\lambda+3G)\,c\,r_y^2\frac{\partial\mu_x}{\partial x}=\varrho\,r_y^2\frac{\partial^2\mu_y}{\partial t^2}\\
&(\lambda+2G)\,r_y^2\frac{\partial^2\mu_x}{\partial x^2}-G\,\mu_x-G\frac{\partial v_z}{\partial x}-(\lambda+3G)\,c\,r_y^2\frac{\partial\mu_y}{\partial x}=\varrho\,r_y^2\frac{\partial^2\mu_x}{\partial t^2},\\
&G\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+G\frac{\partial\mu_x}{\partial x}+G\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_z}{\partial x^2}=\varrho\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2}-r_z^2\,\varrho\,c\frac{\partial^2\lambda_z}{\partial t^2},
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

together with the following boundary conditions at $x=0$, $x=L$:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}+c\frac{\partial v_x}{\partial x}-c\,\lambda_y\right]\delta\lambda_x=0,\\
&\left[\frac{\partial v_y}{\partial x}+r_z^2\,c\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}+c\,v_x+\lambda_x\right]\delta v_y=0,\\
&\left[\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}+c\frac{\partial v_y}{\partial x}+c\,\lambda_x\right]\delta\lambda_y=0,\\
&\left[\frac{\partial\mu_z}{\partial x}\right]\delta\mu_z=0,\\
&\left[(\lambda+2G)\frac{\partial v_x}{\partial x}+(\lambda+2G)\,r_z^2\,c\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}-(\lambda+2G)\,c\,v_y+\lambda\,\lambda_y+\lambda\,\mu_z\right]\delta v_x=0
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

* The material in the paper is based on an investigation, conducted at the Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, under the sponsorship of the Office of Ordnance Research, Contract No. DA-30-115-ORD-709. Project No. 454.13.

[1] *E. Volterra*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 402.

and

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial \lambda_z}{\partial x} + c\,\frac{\partial v_z}{\partial x}\right]\delta\lambda_z = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial \mu_y}{\partial x} + c\,\mu_x\right]\delta\mu_y = 0\,, \\ &\left[\frac{\partial \mu_x}{\partial x} - c\,\mu_y\right]\delta\mu_x = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \mu_x + c\,r_z^2\,\frac{\partial \lambda_z}{\partial x}\right]\delta v_z = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

The above equations and boundary conditions were derived on the assumption that the following equation of constraints is verified during motion:

$$\bar{V}(x,\,y,\,z,\,t) = \bar{v}(x,t) + y\,\bar{\lambda}(x,t) + z\,\bar{\mu}(x,t) \tag{5}$$

and by the application of *Hamilton* Principle [1].

In equation (5) $\bar{V}$ represents the elastic displacement vector at a generic point $P$ of the bar, $\bar{v}$, $\bar{\lambda}$ and $\bar{\mu}$ are three vectors, a priori unknown, functions of the coordinate $x$ and of the time $t$.

The bar is referred to a system of curvilinear righthanded coordinates (0, $x$, $y$, $z$) in which the origin 0 coincides with a generic point on the central (baricentric) axis of the bar, $x$ with the central axis, while $y$ and $z$ with the principal axes of inertia of the cross-section of the bar, $\lambda$ and $G$ are respectively *Lame*'s constant and the modulus of rigidity of the material of the bar.

Equations (1) and the boundary conditions (3) define the five components $\lambda_x$, $\lambda_y$, $\mu_z$, $v_x$ and $v_y$ of the vectors $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ and $\bar{v}$ (eigenvibrations in the plane of initial curvature of the bar), while, equations (2) and the boundary conditions (4) define the remaining four components $\lambda_z$, $\mu_x$, $\mu_y$ and $v_z$ (eigenvibrations which occur outside the plane of initial curvature of the bar).

In the case of a straight bar ($c = 0$), the above equations reduce to

$$(\lambda + 2G)\,r_z^2\,\frac{\partial^2 l_x}{\partial x^2} - G\,l_x - G\,\frac{\partial n_y}{\partial x} = \varrho\,r_z^2\,\frac{\partial^2 l_x}{\partial t^2}\,, \qquad G\,\frac{\partial^2 n_y}{\partial x^2} + G\,\frac{\partial l_x}{\partial x} = \varrho\,\frac{\partial^2 n_y}{\partial t^2}\,, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &G\,r_z^2\,\frac{\partial^2 l_y}{\partial x^2} - (\lambda + 2G)\,l_y - \lambda\,\frac{\partial n_x}{\partial x} - \lambda\,m_z = \varrho\,r_z^2\,\frac{\partial^2 l_y}{\partial t^2}\,, \\ &G\,r_y^2\,\frac{\partial^2 m_z}{\partial x^2} - \lambda\,l_y - (\lambda + 2G)\,m_z - \lambda\,\frac{\partial n_x}{\partial x} = \varrho\,r_y^2\,\frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2}\,, \\ &(\lambda + 2G)\,\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} + \lambda\,\frac{\partial l_y}{\partial x} + \lambda\,\frac{\partial m_z}{\partial x} = \varrho\,\frac{\partial^2 n_x}{\partial t^2}\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial l_x}{\partial x}\right]\delta l_x = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial n_y}{\partial x} + l_x\right]\delta n_y = 0\,, \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial l_y}{\partial x}\right]\delta l_y = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial m_z}{\partial x}\right]\delta m_z = 0\,, \qquad \left[(\lambda + 2G)\,\frac{\partial n_x}{\partial x} + \lambda\,l_y + \lambda\,m_z\right]\delta n_x = 0 \tag{9}$$

and to

$$G\,r_z^2\,\frac{\partial^2 l_z}{\partial x^2} - G\,l_z - G\,m_y = \varrho\,r_z^2\,\frac{\partial^2 l_z}{\partial t^2}\,, \qquad G\,r_y^2\,\frac{\partial^2 m_y}{\partial x^2} - G\,m_y - G\,l_z = \varrho\,r_y^2\,\frac{\partial^2 m_y}{\partial t^2}\,, \tag{10}$$

$$(\lambda + 2G)\,r_y^2\,\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - G\,m_x - G\,\frac{\partial n_z}{\partial x} = \varrho\,r_y^2\,\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2}\,, \qquad G\,\frac{\partial^2 n_z}{\partial x^2} + G\,\frac{\partial m_x}{\partial x} = \varrho\,\frac{\partial^2 n_z}{\partial t^2}\,, \tag{11}$$

$$\left[\frac{\partial l_z}{\partial x}\right]\delta l_z = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial m_y}{\partial x}\right]\delta m_y = 0\,, \tag{12}$$

$$\left[\frac{\partial m_x}{\partial x}\right]\delta m_x = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial n_z}{\partial x} + m_x\right]\delta n_z = 0\,. \tag{13}$$

[1] It should be pointed out that equations (1) and (2) apply to the general case in which the curvature $c$ is a given function of the variable $x$, provided that $dR(x)/dx$ [$R(x)$ being the radius of curvature of the central axis of the bar] is a finite quantity. In fact in deriving the equations of motion, through the application of *Hamilton* Principle, in the given order of approximation the terms

$$\frac{dc(x)}{dx} = -\frac{1}{R(x)^2}\,\frac{dR(x)}{dx}$$

can be neglected.

The object of the present paper is to show how solutions of equations (1) and (2) which satisfy the boundary conditions (3) and (4) can be obtained directly once that the solutions of equations (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12) and (13) (Fundamental Solutions) are known.

Assume as fundamental solutions i. e. as solutions for the straight bar case the solutions

$$l_x(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} L_{xj}(x)\, e^{i\omega_j^{(1)} t}, \qquad n_y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} N_{yj}(x)\, e^{i\omega_j^{(1)} t}, \tag{14}$$

$$l_y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} L_{yj}(x)\, e^{i\omega_j^{(2)} t}, \qquad m_z(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} M_{zj}(x)\, e^{i\omega_j^{(2)} t}, \qquad n_x(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} N_{xj}(x)\, e^{i\omega_j^{(2)} t}, \tag{15}$$

$$l_z(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} L_{zj}(x)\, e^{i\omega_j^{(3)} t}, \qquad m_y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} M_{yj}(x)\, e^{i\omega_j^{(3)} t}, \tag{16}$$

$$m_x(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} M_{xj}(x)\, e^{i\omega_j^{(4)} t}, \qquad n_z(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} N_{zj}(x)\, e^{i\omega_j^{(4)} t}. \tag{17}$$

While assume as solutions of the equations of motion (1) and (2) the following expressions:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_x(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_{xk} + \sum_{r\neq 1} \alpha_r L_{xr}\right) e^{i\omega_k^{(1)} t},\\
\nu_y(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(N_{yk} + \sum_{r\neq k} \alpha_r N_{yr}\right) e^{i\omega_k^{(1)} t},\\
\lambda_y(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_{yk} + \sum_{r\neq k} \beta_r L_{yr}\right) e^{i\omega_k^{(1)} t},\\
\mu_z(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{zk} + \sum_{r\neq k} \beta_r M_{zr}\right) e^{i\omega_k^{(1)} t},\\
\nu_x(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(N_{xk} + \sum_{r\neq k} \beta_r N_{xr}\right) e^{i\omega_k^{(1)} t}
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

and

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_z(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_{zk} + \sum_{r\neq k} \gamma_r L_{zr}\right) e^{i\omega_k^{(11)} t},\\
\mu_y(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{yk} + \sum_{k\neq r} \gamma_r M_{yr}\right) e^{i\omega_k^{(11)} t},\\
\mu_x(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{xk} + \sum_{r\neq k} \delta_r M_{xr}\right) e^{i\omega_k^{(11)} t},\\
\nu_z(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(N_{zk} + \sum_{r\neq k} \delta_r N_{zr}\right) e^{i\omega_k^{(11)} t}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Where the coefficients $\alpha_r$, $\beta_r$, $\gamma_r$ and $\delta_r$ are supposed to be small quantities compared with unity. The summation indicated by the $\sum_{r\neq k}$ sign is over all values of $r$ between 1 and $\infty$ except $k$.

The problem of solving the equations of motion for a curved bar derived by the „Method of Internal Constraints" is therefore reduced to the problem of finding the expressions for the numerical coefficients $\alpha_r$, $\beta_r$, $\gamma_r$, $\delta_r$ and for the frequencies $\omega_k^{(1)}$, $\omega_k^{(11)}$ ($r, k = 1, 2, 3, \ldots$) in terms of the eigenfunctions $L_{xk}$, $L_{yk}$, $L_{zk}$, $M_{xk}$, $M_{yk}$, $M_{zk}$, $N_{xk}$, $N_{yk}$, $N_{zk}$ and of the eigenvalues $\omega_k^{(1)}$, $\omega_k^{(2)}$, $\omega_k^{(3)}$, $\omega_k^{(4)}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) of the corresponding equations of motion for the case of a straight bar.

**2. Eigenvibrations in the Plane of Initial Curvature of the Bar.** On the assumption that the quantity (pure number) $cr_z$ is very small compared with unity so that $(r_z c)^2$ can be neglected,

equations (1) can be written under the form [1]

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+2G)\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial x^2}-G\,\lambda_x-G\frac{\partial v_y}{\partial x}-(2\lambda+3G)\,c\,r_z^2\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}-r_z^2\,c\,\lambda\frac{\partial\mu_z}{\partial x}-Gc\,v_x\\
&\qquad=\varrho\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial t^2}-2\,\varrho\,r_z\,c\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2},\\
&G\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+G\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}+(2\lambda+3G)\,c\frac{\partial v_x}{\partial x}+2\lambda\,c\,\mu_z+(\lambda+3G)\,c\,\lambda_y=\varrho\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2}-2\,\varrho\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial t^2},\\
&G\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial x^2}-(\lambda+2G)\,\lambda_y-\lambda\frac{\partial v_x}{\partial x}-\lambda\,\mu_z+(\lambda+2G)\,c\,r_z^2\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}+\lambda\,c\,v_y\\
&\qquad=\varrho\,r_z^2\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial t^2}-2\,\varrho\,r_z^2\,c\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2},\\
&G\,r_y^2\frac{\partial^2\mu_z}{\partial x^2}-\lambda\,\lambda_y-(\lambda+2G)\,\mu_z-\lambda\frac{\partial v_x}{\partial x}+\lambda c\,v_y=r_y^2\,\varrho\frac{\partial^2\mu_z}{\partial t^2},\\
&(\lambda+2G)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\mu_z}{\partial x}-(\lambda+2G)\,c\frac{\partial v_y}{\partial x}=\varrho\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}-2\,\varrho\,r_z^2\,c\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{1'}$$

The eigenfunctions of the fundamental solutions $L_{xk}$ and $N_{yk}$; $L_{yk}$, $N_{xk}$ and $M_{zk}$ satisfy the following differential equations, boundary conditions and orthogonality conditions [2]:

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda+2G)\,r_z^2\frac{d^2L_{xk}}{dx^2}-G\,L_{xk}-G\frac{dN_{yk}}{dx}=-\varrho\,r_z^2\,[\omega_k^{(1)}]^2\,L_{xk},\\
&G\frac{d^2N_{yk}}{dx^2}+G\frac{dL_{xk}}{dx}=-\varrho\,[\omega_k^{(1)}]^2\,N_{yk},
\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{dL_{xk}}{dx}\right]L_{xk}=0,\\
&\left[\frac{dN_{yk}}{dx}+L_{xk}\right]N_{yk}=0,
\end{aligned}\right\}\qquad\text{at}\quad x=0,\quad x=L,\tag{21}$$

$$\frac{1}{L^3}\int_0^L(r_z^2\,L_{xk}\,L_{xj}+N_{yk}\,N_{yj})\,dx=\begin{cases}1 & \text{for } k=j,\\ 0 & \text{for } k\neq j\end{cases},\tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}
&G\,r_z^2\frac{d^2L_{yk}}{dx^2}-(\lambda+2G)\,L_{yk}-\lambda\frac{dN_{xk}}{dx}-\lambda\,M_{zk}=-\varrho\,r_z^2\,[\omega_k^{(2)}]^2\,L_{yk},\\
&G\,r_y^2\frac{d^2M_{zk}}{dx^2}-\lambda\,L_{yk}-(\lambda+2G)\,M_{zk}-\lambda\frac{dN_{xk}}{dx}=-\varrho\,r_y^2\,[\omega_k^{(2)}]^2\,M_{zk},\\
&(\lambda+2G)\frac{d^3N_{xk}}{dx^2}+\lambda\frac{dL_{yk}}{dx}+\lambda\frac{dM_{zk}}{dx}=-\varrho\,[\omega_k^{(2)}]^2\,N_{xk},
\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{dL_{yk}}{dx}\right]L_{yk}=0,\qquad\left[\frac{dM_{zk}}{dx}\right]M_{zk}=0,\\
&\left[(\lambda+2G)\frac{dN_{xk}}{dx}+\lambda\,L_{yk}+\lambda\,M_{zk}\right]N_{xk}=0,
\end{aligned}\right\}\qquad\text{at } x=0,\ x=L\tag{24}$$

$$\frac{1}{L^3}\int_0^L(r_z^2\,L_{yk}\,L_{yj}+r_y^2\,M_{zk}\,M_{zj}+N_{xk}\,N_{xj})\,dx=\begin{cases}1 & \text{for } k=j,\\ 0 & \text{for } k\neq j.\end{cases}\tag{25}$$

The eigenfunctions $L_{xk}$ and $N_{yk}$; $L_{yk}$, $N_{xk}$ and $M_{zk}$ must be chosen in such a way that not only the boundary conditions (21) and (24) but also the boundary conditions (3) of the general problem be satisfied.

For instance in discussing the problem of flexural vibrations of a curved bar simply supported, the eigenfunctions $L_{xk}$ and $N_{yk}$ must satisfy the condition of simple support: at $x=0$,

[1] We suppose also that in the same order of approximation the quantities $c^2v_x$, $c^2v_y$, $c^2v_z$ can be neglected.
[2] See the Appendix of the paper.

$x = L$

$$N_{yk} = 0 \qquad \text{(displacement equal to zero)},$$

$$\frac{dL_{xk}}{dx} = 0 \qquad \text{(bending moment equal to zero)}.$$

In order to satisfy at the same time equations (24) and equations (3) one has to assume as associate eigenfunctions $L_{yk}$, $N_{xk}$ and $M_{zk}$ the ones which satisfy the following conditions, at $x = 0$, $x = L$:

$$L_{yk} = M_{zk} = \left[(\lambda + 2G)\frac{dN_{xk}}{dx} + \lambda L_{yk} + \lambda M_{zk}\right] = 0 .$$

In the case instead in which the bar is built-in at both ends, the eigenfunctions $L_{xk}$ and $N_{yk}$ must satisfy the conditions of fixity at $x = 0$, $x = L$

$$N_{yk} = 0 \qquad \text{(displacement equal to zero)},$$

$$L_{xk} = 0 \qquad \text{(slope equal to zero)}.$$

The associate eigenfunctions $L_{yk}$, $N_{xk}$ and $M_{zk}$ in this case are the ones which satisfy the following boundary conditions at $x = 0$, $x = L$:

$$L_{yk} = M_{zk} = N_{xk} = 0 .$$

By substituting equations (18) into equation (1'), dropping out second order terms, in view of equations (20) and (23) one obtains

$$\left.\begin{aligned}
&-\varrho\, r_z^2 [\omega_k^{(1)}]^2 \left(L_{xk} + \sum_{r\neq k} \alpha_r L_{xr}\right) - (2\lambda + 3G)\, c\, r_z^2 \frac{dL_{yk}}{dx} - r_z^2\, c\, \lambda \frac{dM_{zk}}{dx} - Gc\, N_{xk} \\
&\qquad = \varrho\, r_z^2 [\omega_k^{(1)}]^2 \left(L_{xk} + \sum_{r\neq k} \alpha_r L_{xr}\right) + 2\varrho\, r_z^2\, c\, N_{xk} [\omega_k^{(1)}]^2 \\
&-\varrho [\omega_k^{(1)}]^2 \left(N_{yk} + \sum_{r\neq k} \alpha_r N_{yr}\right) + (2\lambda + 3G)\, c \frac{dN_{xk}}{dx} + 2\lambda\, c\, M_{zk} + (\lambda + 3G)\, c\, L_{yk} \\
&\qquad = -\varrho [\omega_k^{(1)}]^2 \left(N_{yk} + \sum_{r\neq k} \alpha_r N_{yr}\right) + 2\varrho\, r_z^2\, c\, L_{yk} [\omega_k^{(1)}]^2 ,
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\varrho\, r_z^2 [\omega_k^{(2)}]^2 \left(L_{yk} + \sum_{r\neq k} \beta_r L_{yr}\right) + (\lambda + 2G)\, c\, r_z^2 \frac{dL_{xk}}{dx} + \lambda\, c\, N_{yk} \\
&\qquad = -\varrho\, r_z^2 [\omega_k^{(1)}]^2 \left(L_{yk} + \sum_{r\neq k} \beta_r L_{yr}\right) + 2\varrho\, r_z^2\, c\, N_{yk} [\omega_k^{(1)}]^2 , \\
&-r_y^2 \varrho [\omega_k^{(2)}]^2 \left(M_{zk} + \sum_{r\neq k} \beta_r M_{zr}\right) + \lambda\, c\, N_{yk} = -r_y^2 \varrho [\omega_k^{(1)}]^2 \left(M_{zk} + \sum_{r\neq k} \beta_r M_{zr}\right) , \\
&-\varrho [\omega_k^{(2)}]^2 \left(N_{xk} + \sum_{r\neq k} \beta_r N_{xr}\right) - (\lambda + 2G)\, c \frac{dN_{yk}}{dx} \\
&\qquad = -\varrho [\omega_k^{(1)}]^2 \left(N_{xk} + \sum_{r\neq k} \beta_r N_{xr}\right) + 2\varrho\, r_z^2\, c\, ]\omega_k^{(1)}]^2 L_{xk} .
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

By multiplying the first of equations (26) by $L_{xk}\, dx$, the second by $N_{yk}\, dx$ integrating between 0 and $L$ and adding them together, in view of the orthogonality conditions (22) one gets the value of

$$[\Phi_k^{(1)}]^2_{(1)} = \frac{[\omega_k^{(1)}]^2_{(1)} L^2 \varrho}{G}$$

given by equation (28).

Multiplying the first of equations (26) by $L_{xs}\, dx$, the second by $N_{ys}\, dx$ integrating between 0 and $L$ and adding them together one obtains, in view of the orthogonality conditions (22) the value for $\alpha_s$ given by equation (29).

Multiplying the first of equations (27) by $L_{yk}$, the second by $M_{zk}$, the third by $N_{xk}$ integrating between 0 und $L$ and adding them together, one obtains, in view of the orthogonality conditions (25) the value of

$$[\Phi_k^{(1)}]^2_{(2)} = \frac{[\omega_k^{(1)}]^2_{(2)} L^2 \varrho}{G}$$

given by equation (30).

Multiplying the first of equations (27) by $L_{yk}$, the second by $M_{zk}$, the third by $N_{xk}$ integrating between 0 and $L$ and adding them together, one obtains in view of the orthogonality

conditions (25) the value of $\beta_s$ given by equation (31):

$$[\Phi_k^{(1)}]^2_{(1)} = \frac{1}{1 - 2\delta^2 \frac{1}{L}\int_0^L c\,(N_{xk}\,L_{xk} + N_{yk}\,L_{yk})\,dx}\left[[\Phi_k^{(1)}]^2 + \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\left(\delta^2 L\int_0^L c\,\frac{dL_{yk}}{dx}\,L_{xk}\,dx - \frac{1}{L}\int_0^L c\,\frac{dN_{xk}}{dx}\,N_{yk}\,dx\right) + \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\left(\delta^2 L\int_0^L c\,\frac{dM_{zk}}{dx}\,L_{xk}\,dx - \frac{2}{L}\int_0^L c\,M_{zk}\,N_{yk}\,dx\right) + \frac{1}{L}\int_0^L c\,N_{xk}\,L_{xk}\,dx - \frac{3-4\sigma}{1-2\sigma}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,L_{yk}\,N_{yk}\,dx\right], \tag{28}$$

$$\alpha_s = \frac{1}{[\Phi_k^{(1)}]^2_{(1)} - [\Phi_k^{(1)}]^2}\left[2\,[\Phi_k^{(1)}]^2_{(1)}\,\delta^2\frac{1}{L}\int_0^L c\,(N_{xk}\,L_{xs} + L_{yk}\,L_{ys})\,dx + \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\left(\delta^2 L\int_0^L c\,\frac{dL_{yk}}{dx}\,L_{xs}\,dx - \frac{1}{L}\int_0^L c\,\frac{dN_{xk}}{dx}\,N_{ys}\,dx\right) + \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\left(\delta^2 L\int_0^L c\,\frac{dM_{zk}}{dx}\,L_{xs}\,dx - \frac{2}{L}\int_0^L c\,M_{zk}\,N_{ys}\,dx\right) + \frac{1}{L}\int_0^L c\,N_{xk}\,L_{xs}\,dx - \frac{3-4\sigma}{1-2\sigma}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,L_{yk}\,N_{ys}\,dx\right], \tag{29}$$

$$[\Phi_k^{(1)}]^2_{(2)} = \frac{1}{1 - 2\delta^2 \frac{1}{L}\int_0^L c\,(N_{yk}\,L_{yk} + L_{xk}\,N_{xk})\,dx}\left[[\Phi_k^{(2)}]^2 - \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\left(\delta^2 L\int_0^L c\,\frac{dL_{xk}}{dx}\,L_{xk}\,dx - \frac{1}{L}\int_0^L c\,\frac{dN_{yk}}{dx}\,N_{xk}\,dx\right) - \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,(N_{yk}\,L_{xk} + N_{yk}\,M_{zk})\,dx\right], \tag{30}$$

$$\beta_s = \frac{1}{[\Phi^{(1)}]^2_{(2)} - [\Phi_k^{(2)}]^2}\left[2\,[\Phi_k^{(1)}]^2_{(2)}\,\delta^2\frac{1}{L}\int_0^L c\,(N_{yk}\,L_{ys} + L_{xk}\,N_{xs})\,dx - \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\left(\delta^2 L\int_0^L c\,\frac{dL_{xk}}{dx}\,L_{xs}\,dx - \frac{1}{L}\int_0^L c\,\frac{dN_{yk}}{dx}\,N_{xs}\,dx\right) - \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,(N_{yk}\,L_{xs} + N_{yk}\,M_{zs})\,dx\right]. \tag{31}$$

In equation (28), (29), (30), and (31) $\delta = r_z/L$.

**3. Eigenvibrations Outside the Plane of Initial Curvature of the Bar.** The eigenfunctions of the fundamental solutions $L_{zk}$ and $M_{yk}$; $M_{xk}$ and $N_{zk}$ satisfy the following differential equations, boundary conditions and orthogonality equations:

$$\begin{aligned} G\,r_z^2\frac{d^2L_{zk}}{dx^2} - G\,L_{zk} - G\,M_{yk} &= -\varrho\,r_z^2\,[\omega_k^{(3)}]^2\,L_{zk}\,,\\ G\,r_y^2\frac{d^2M_{yk}}{dx^2} - G\,M_{yk} - G\,L_{zk} &= -\varrho\,r_y^2\,[\omega_k^{(3)}]^2\,M_{yk}\,, \end{aligned} \tag{32}$$

at $x = 0$, $x = L$:

$$\left[\frac{dL_{xk}}{dx}\right] L_{xk} = 0\,, \qquad \left[\frac{dM_{yk}}{dx}\right] M_{yk} = 0\,, \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots) \tag{33}$$

$$\frac{1}{L^3}\int_0^L (r_z^2\, L_{xk}\, L_{xj} + r_y^2\, M_{yk}\, M_{yj})\, dx = \begin{cases} 1 \text{ for } k = j\,, \\ 0 \text{ for } k \neq j \end{cases} \tag{34}$$

and

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda + 2G)\, r_y^2 \frac{d^2 M_{xk}}{dx^2} - G\, M_{xk} - G \frac{dN_{zk}}{dx} = -\varrho\, r_y^2\, [\omega_k^{(4)}]^2\, M_{xk} \\ &G \frac{d^2 N_{zk}}{dx^2} + G \frac{dM_{xk}}{dx} = -\varrho\, [\omega_k^{(4)}]^2\, N_{zk}\,, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

at $x = 0$, $x = L$:

$$\left[\frac{dM_{xk}}{dx}\right] M_{xk} = 0\,, \qquad \left[\frac{dN_{zk}}{dx} + M_{xk}\right] N_{zk} = 0\,, \tag{36}$$

$$\frac{1}{L^3}\int_0^L (r_y^2\, M_{xk}\, M_{xj} + N_{xk}\, N_{zj})\, dx = \begin{cases} 1 \text{ for } k = j\,, \\ 0 \text{ for } k \neq j\,. \end{cases} \tag{37}$$

As in the previous case, the eigenfunctions $L_{xk}$, $M_{yk}$, and $M_{xk}$, $N_{zk}$ must satisfy not only the boundary conditions (33) and (36) of the fundamental cases but also the boundary conditions (4) of the general problem. By substituting equations (19) into equations (2), by dropping out second order terms, in view of equations (32) and (35), one obtains the following equations:

$$\left.\begin{aligned} &-\varrho\, [\omega_k^{(3)}]^2\, r_z^2 \Big(L_{xk} + \sum_{r \neq k} \gamma_r\, L_{zr}\Big) + G\, r_z^2\, c\, \frac{d^2 N_{zk}}{dx^2} = -\varrho\, r_z^2\, [\omega_k^{(II)}]_{(3)}^2 \Big(L_{xk} + \sum_{r \neq k} \gamma_r\, L_{zr}\Big) \\ &\quad + r_z^2\, \varrho\, c\, [\omega_k^{(II)}]_{(3)}^2\, N_{xk}\,, \\ &-\varrho\, r_y^2\, [\omega_k^{(3)}]^2 \Big(M_{yk} + \sum_{r \neq k} \gamma_r\, M_{yr}\Big) + (\lambda + 3G)\, c\, r_y^2 \frac{dM_{xk}}{dx} \\ &\quad = -\varrho\, r_y^2\, [\omega_k^{(II)}]_{(3)}^2 \Big(M_{yk} + \sum_{r \neq k} \gamma_r\, M_{yr}\Big) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

and

$$\left.\begin{aligned} &-\varrho\, r_y^2\, [\omega_k^{(4)}]^2 \Big(M_{xk} + \sum_{r \neq k} \delta_r\, M_{xr}\Big) - (\lambda + 3G)\, c\, r_y^2 \frac{dM_{yk}}{dx} \\ &\quad = -\varrho\, r_y^2\, [\omega_k^{(II)}]_{(4)}^2 \Big(M_{xk} + \sum_{r \neq k} \delta_r\, M_{xr}\Big)\,, \\ &-\varrho\, [\omega_k^{(4)}]^2 \Big(N_{zk} + \sum_{r \neq k} \delta_r\, N_{zr}\Big) + G\, r_z^2\, c\, \frac{d^2 L_{zk}}{dx^2} \\ &\quad = -\varrho\, [\omega_k^{(II)}]_{(4)}^2 \Big(N_{zk} + \sum_{r \neq k} \delta_r\, N_{zr}\Big) + r_z^2\, \varrho\, c\, [\omega_k^{(II)}]_{(4)}^2\, L_{zk}\,. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

By multiplying the first of equations (38) by $L_{zk}\, dx$, the second by $M_{yk}\, dx$, integrating between 0 and $L$, adding them together, one obtains in view of the orthogonality conditions (34), the following value for

$$\left.\begin{aligned} &[\Phi_k^{(II)}]_{(3)}^2 = \frac{[\omega_k^{(II)}]_{(3)}^2\, L^2\, \varrho}{G}\,, \\ &[\Phi_k^{(II)}]_{(3)}^2 = \frac{1}{1 - \delta_z^2 \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L c\, N_{zk}\, L_{zk}\, dx} \Bigg[ [\Phi_k^{(3)}]^2 \\ &\quad - \delta_z^2 L \int_0^L c\, \frac{d^2 N_{zk}}{dx^2}\, L_{zk}\, dx - \left(\frac{3 - 4\sigma}{1 - 2\sigma}\right) \delta_y^2 L \int_0^L c\, \frac{dM_{xk}}{dx}\, M_{yk}\, dx \Bigg]. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

By multiplying the first of equations (38) by $L_{zs}\, dx$, the second by $M_{ys}\, dx$, integrating between 0 and $L$, adding them together, one obtains in view of the orthogonality conditions (34), the follo-

wing expression for $\gamma_s$:

$$\gamma_s = \frac{1}{[\Phi_k^{(11)}]^2_{(3)} - [\Phi_k^{(3)}]^2} \left[ [\Phi_k^{(11)}]^2_{(3)}\, \delta_z^2 \frac{1}{L} \int_0^L c\, N_{zk}\, L_{zs}\, dx \right. \\ \left. - \delta_z^2 L \int_0^L c \frac{d^2 N_{zk}}{dx^2} L_{zs}\, dx - \frac{3-4\sigma}{1-2\sigma} \delta_y^2 L \int_0^L c \frac{dM_{xk}}{dx} M_{ys}\, dx \right]. \tag{41}$$

By multiplying the first of equations (39) by $M_{xk}\, dx$, the second by $N_{zk}\, dx$, integrating between 0 und $L$, adding them together, one obtains, in view of the orthogonality conditions (37), the following expression for

$$[\Phi_k^{(11)}]^2_{(4)} = \frac{[\omega_k^{(11)}]^2_{(4)} L^2 \varrho}{G},$$

$$[\Phi_k^{(11)}]^2_{(4)} = \frac{1}{1 - \delta_z^2 \frac{1}{L} \int_0^L c\, L_{zk}\, N_{zk}\, dx} \left[ [\Phi_k^{(4)}]^2 \right. \\ \left. - \delta_z^2 L \int_0^L c \frac{d^2 L_{zk}}{dx^2} N_{zk}\, dx + \frac{3-4\sigma}{1-2\sigma} \delta_y^2 L \int_0^L c \frac{dM_{yk}}{dx} M_{xk}\, dx \right]. \tag{42}$$

By multiplying the first of equations (39) by $M_{xs}\, dx$, the second by $N_{zs}\, dx$, integrating between 0 and $L$, adding them together, one obtains, in view of the orthogonality conditions (37), the following expression for $\delta_s$:

$$\delta_s = \frac{1}{[\Phi_k^{(11)}]^2_{(4)} - [\Phi_k^{(4)}]^2} \left[ [\Phi_k^{(11)}]^2_{(4)}\, \delta_z^2 \frac{1}{L} \int_0^L c\, L_{zk}\, N_{zs}\, dx \right. \\ \left. - \delta_z^2 L \int_0^L c \frac{d^2 L_{zk}}{dx^2} N_{zs}\, dx + \frac{3-4\sigma}{1-2\sigma} \delta_y^2 L \int_0^L c \frac{dM_{yk}}{dx} M_{xs}\, dx \right]. \tag{43}$$

In equations (40), (41), (42) and (43) $\delta_y = r_y/L$ and $\delta_z = r_z/L$.

**4. The Same Problem in Two-Dimensional Elasticity (Plane Strain).** In two-dimensional elasticity (plane strain) on the assumption that the quantity (pure number) $cr$ is very small compared with unity, so that $(cr)^2$ can be neglected, the equations of motion derived in a previous paper[1] for a curved bar of length $L$, of constant radius of inertia $r$, and of curvature $c$ can be written under the following form:

$$\frac{E}{1-\sigma^2} r^2 \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial x^2} - \frac{E}{2(1+\sigma)} \lambda_x - \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{E(3+\sigma)}{1-\sigma^2} r^2 c \frac{\partial \lambda_y}{\partial x} \\ - \frac{E}{2(1+\sigma)} c\, v_x = \varrho\, r^2 \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial t^2} - 2\, r^2 \varrho\, c \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} r^2 \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial x^2} - \frac{E}{(1-\sigma^2)} \lambda_y - \frac{E\sigma}{1-\sigma^2} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{E}{2(1-\sigma^2)} r^2 c \frac{\partial \lambda_x}{\partial x} \\ + \frac{E\sigma}{1-\sigma^2} c\, v_y = \varrho\, r^2 \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial t^2} - 2\, r^2 \varrho\, c \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2}, \tag{44}$$

$$\frac{E}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{E\sigma}{1-\sigma^2} \frac{\partial \lambda_y}{\partial x} - \frac{E}{1-\sigma^2} c \frac{\partial v_y}{\partial x} = \varrho \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} - 2\, \varrho\, r^2 c \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial \lambda_x}{\partial x} + \frac{E}{1-\sigma} \lambda_y + \frac{E(3+\sigma)}{2(1-\sigma^2)} c \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ = \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} - 2\, \varrho\, r^2 c \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial t^2}$$

[1] *E. Volterra*, l. c.

with the boundary conditions at $x = 0$, $x = L$:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial \lambda_x}{\partial x} + c\frac{\partial \nu_x}{\partial x} + c\,\lambda_y\right]\delta\lambda_x = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial \lambda_y}{\partial x} + c\frac{\partial \nu_y}{\partial x} + c\,\lambda_x\right]\delta\lambda_y = 0\,,\\ &\left[\frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \sigma\,\lambda_y + r^2\,c\frac{\partial \lambda_x}{\partial x} - c\,\nu_y\right]\delta\nu_x = 0\,, \qquad \left[\frac{\partial \nu_y}{\partial x} + \lambda_x + r^2\,c\frac{\partial \lambda_y}{\partial x} + c\,\nu_x\right]\delta\nu_y = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

In the above equations $\lambda_x$, $\lambda_y$; $\nu_x$ and $\nu_y$ are the components of the vectors $\bar{\lambda}$ and $\bar{\nu}$ on the $x$ and $y$ axes. $x$ coincides with the central (baricentric) curvilinear axis of the bar, while $y$ with the normal to the central axis of the bar and is directed positively towards the center of curvature. $E$ and $\sigma$ are respectively *Young*'s modulus and *Poisson*'s ratio for the material of the bar.

Assume as solutions of equations (44) and (45) the following expressions:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_x(x,t) = \sum_{k=1}\left(L_{xk} + \sum_{r\neq k}\alpha_r\,L_{xr}\right)e^{i\,\omega_k t}\,, \qquad \lambda_y(x,t) = \sum_{k=1}\left(L_{yk} + \sum_{r\neq k}\beta_r\,L_{yr}\right)e^{i\,\omega_k t}\,,\\ &\nu_x(x,t) = \sum_{k=1}\left(N_{xk} + \sum_{r\neq k}\beta_r\,N_{xr}\right)e^{i\,\omega_k t}\,, \qquad \nu_y(x,t) = \sum_{k=1}\left(N_{yk} + \sum_{r\neq k}\alpha_r\,N_{yr}\right)e^{i\,\omega_k t}\,, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

where $L_{xk}$, $L_{yk}$, $N_{xk}$ and $N_{yk}$ are the eigenfunctions of the fundamental case i. e. are defined by the same equations (44) and (45) when $c = 0$.

The values $\alpha_r$, $\beta_r$ are quantities which are supposed to be very small compared with unity and of the same order of magnitude of $cr$.

The functions $L_{xk}$, $L_{yk}$, $N_{xk}$ and $N_{yk}$ satisfy the following differential equations, boundary conditions and orthogonality equations:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{E}{1-\sigma^2}\,r^2\frac{d^2L_{xk}}{dx^2} - \frac{E}{2(1+\sigma)}\,L_{xk} - \frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{dN_{yk}}{dx} = -\varrho\,r^2\,[\omega_k^{(1)}]^2\,L_{xk}\\ &\frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{d^2N_{yk}}{dx^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{dL_{xk}}{dx} = -\varrho\,[\omega_k^{(1)}]^2\,N_{yk}\,, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{dL_{xk}}{dx}\right]L_{xk} = 0\,,\\ &\left[\frac{dN_{yk}}{dx} + L_{xk}\right]N_{yk} = 0\,, \end{aligned}\right\} \qquad \text{at } x = 0,\ x = L \tag{48}$$

$$\frac{1}{L^3}\int_0^L (r^2\,L_{xk}\,L_{xj} + N_{yk}\,N_{yj})\,dx = \left\{\begin{aligned} &1 \text{ for } k = j\,,\\ &0 \text{ for } k \neq j \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

and

$$\left.\begin{aligned} &\frac{E}{2(1+\sigma)}\,r^2\frac{d^2L_{yk}}{dx^2} - \frac{E}{1-\sigma^2}\,L_{yk} - \frac{E\,\sigma}{(1-\sigma^2)}\frac{dN_{xk}}{dx} = -\varrho\,r^2\,[\omega_k^{(2)}]^2\,L_{yk}\,,\\ &\frac{E}{1-\sigma^2}\frac{d^2N_{xk}}{dx^2} + \frac{E\,\sigma}{1-\sigma^2}\frac{dL_{yk}}{dx} = -\varrho\,[\omega_k^{(2)}]^2\,N_{xk}\,, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

$$\left[\frac{dL_{yk}}{dx}\right]L_{yk} = 0\,, \qquad \left[\frac{dN_{xk}}{dx} + \sigma\,L_{yk}\right]N_{xk} = 0\,, \tag{51}$$

$$\frac{1}{L^3}\int_0^L (r^2\,L_{yx}\,L_{yj} + N_{xk}\,N_{xj})\,dx = \left\{\begin{aligned} &1 \text{ for } k = j\,,\\ &0 \text{ for } k \neq j\,. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

By substituting the expressions (46) into the differential equations (44), by dropping out second order terms, in view of equations (47) and (50), one obtains the following equations:

$$\left.\begin{aligned} &-\varrho\,r^2\,[\omega_k^{(1)}]^2\left(L_{xk} + \sum_{r\neq k}\alpha_r\,L_{xr}\right) - \frac{E(3+\sigma)}{1-\sigma^2}\,r^2\,c\,\frac{dL_{yk}}{dx}\\ &-\frac{E}{2(1+\sigma)}\,c\,N_{xk} = -\varrho\,r^2\,\omega_k^2\left(L_{xk} + \sum_{r\neq k}\alpha_r\,L_{xr}\right) + \omega_k^2\,2\,r^2\,\varrho\,c\,N_{xk} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

$$
\begin{aligned}
&-\varrho\,[\omega_k^{(1)}]^2\Big(N_{yk}+\sum_{r\neq k}\alpha_r\,N_{yr}\Big)+\frac{E}{1-\sigma}\,L_{yk}+\frac{E\,(3+\sigma)}{2\,(1-\sigma^2)}\,c\,\frac{dN_{xk}}{dx}\\
&\qquad=-\varrho\,\omega_k^2\Big(N_{yk}+\sum_{r\neq k}\alpha_r\,N_{yr}\Big)+2\,r^2\,\varrho\,c\,\omega_k^2\,L_{yk}
\end{aligned}
$$

and

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\varrho\,r^2\,[\omega_k^{(2)}]^2\Big(L_{yk}+\sum_{r\neq k}\beta_r\,L_{yr}\Big)+\frac{E}{2\,(1-\sigma^2)}\,r^2\,c\,\frac{dL_{xk}}{dx}+\frac{E\,\sigma}{(1-\sigma^2)}\,c\,N_{yk}\\
&\qquad=-\varrho\,r^2\,\omega_k^2\Big(L_{yk}+\sum_{r\neq k}\beta_r\,L_{yr}\Big)+2\,r^2\,\varrho\,c\,\omega_k^2\,N_{yk}\\
&-\varrho\,[\omega_k^{(2)}]^2\Big(N_{xk}+\sum_{r\neq k}\beta_r\,N_{xr}\Big)-\frac{E\,c}{1-\sigma^2}\,\frac{dN_{yk}}{dx}=-\varrho\,\omega_k^2\Big(N_{xk}+\sum_{r\neq k}\beta_r\,N_{xr}\Big)\\
&\quad+2\,r^2\,\varrho\,c\,\omega_k^2\,L_{xk}\,.
\end{aligned}
\right\}
\tag{54}
$$

By multiplying the first of equations (53) by $L_{xk}\,dx$, the second by $N_{yk}\,dx$, integrating between 0 and $L$, adding them together one obtains, in view of the orthogonality conditions (49), the following expression for

$$
\left.
\begin{aligned}
&[\Phi_k]^2_{(1)}=\frac{[\omega_k]^2_{(1)}\,L^2\,\varrho}{E}\,,\\
&[\Phi_k]^2_{(1)}=\frac{1}{1-2\,\delta^2\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,(N_{xk}\,L_{xk}+L_{yk}\,N_{yk})\,dx}\Bigg[[\Phi_k^{(1)}]^2\\
&\quad+\frac{3+\sigma}{1-\sigma^2}\,\delta^2\,L\int_0^L c\,\frac{dL_{yk}}{dx}\,L_{xk}\,dx-\frac{1}{1-\sigma}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,L_{yk}\,N_{yk}\,dx\\
&\quad-\frac{3+\sigma}{2\,(1-\sigma^2)}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,\frac{dN_{xk}}{dx}\,N_{yk}\,dx+\frac{1}{2\,(1+\sigma)}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,N_{xk}\,L_{xk}\,dx\Bigg].
\end{aligned}
\right\}
\tag{55}
$$

By multiplying the first of equations (53) by $L_{xs}\,dx$, the second by $N_{ys}\,dx$, integrating between 0 and $L$, adding them together one obtains, in view of the orthogonality conditions (49), the following expression for $\alpha_s$:

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha_s=\frac{1}{[\Phi_k]^2_{(1)}-[\Phi_k^{(1)}]^2}\Bigg[&2\,\delta^2\,\frac{1}{L}\,[\Phi_k]^2_{(1)}\int_0^L c\,(N_{xk}\,L_{xs}+L_{yk}\,N_{ys})\,dx\\
&+\frac{3+\sigma}{1-\sigma^2}\,\delta^2 L\int_0^L c\,\frac{dL_{yk}}{dx}\,L_{xs}\,dx-\frac{1}{1-\sigma}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,L_{yk}\,N_{ys}\,dx\\
&+\frac{1}{2\,(1+\sigma)}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,N_{xk}\,L_{xs}\,dx-\frac{3+\sigma}{2\,(1-\sigma^2)}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,\frac{dN_{xk}}{dx}\,N_{ys}\,dx\Bigg].
\end{aligned}
\right\}
\tag{56}
$$

By multiplying the first of equations (54) by $L_{yk}\,dx$, the second by $N_{xk}\,dx$, integrating between 0 and $L$, adding them together one obtains, in view of the orthogonality conditions (52), the following expression for

$$
\left.
\begin{aligned}
&[\Phi_k]^2_{(2)}=\frac{[\omega_k]^2_{(2)}\,L^2\,\varrho}{E}\,,\\
&[\Phi_k]^2_{(2)}=\frac{1}{1-2\,\delta^2\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,(L_{xk}\,N_{xk}+L_{yk}\,N_{yk}\,dx}\Bigg[[\Phi_k^{(2)}]^2-\frac{1}{2\,(1-\sigma^2)}\,\delta^2\,L\int_0^L c\,\frac{dL_{xk}}{dx}\,L_{yk}\,dx\\
&\quad-\frac{\sigma}{1-\sigma^2}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,N_{yk}\,L_{xk}\,dx+\frac{1}{1-\sigma^2}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,\frac{dN_{yk}}{dx}\,N_{xk}\,dx\Bigg].
\end{aligned}
\right\}
\tag{57}
$$

By multiplying the first of equations (54) by $L_{ys}\,dx$, the second by $N_{xs}\,dx$, integrating between 0 and $L$, adding them together, one obtains, in view of the orthogonality conditions (52), the following expression for $\beta_s$:

$$\left.\begin{aligned}\beta_s = \frac{1}{[\Phi_k]^2_{(2)} - [\Phi^{(2)}_k]^2}\Bigg[&2\,\delta^2\,\frac{1}{L}\,[\Phi_k]^2_{(2)}\int_0^L c\,(L_{xk}\,N_{xs} + N_{yk}\,L_{ys})\,dx\\ &- \frac{1}{2\,(1-\sigma^2)}\,\delta^2\,L\int_0^L c\,\frac{dL_{xk}}{dx}\,L_{ys}\,dx - \frac{\sigma}{1-\sigma^2}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,N_{yk}\,L_{ys}\,dx\\ &+ \frac{1}{1-\sigma^2}\,\frac{1}{L}\int_0^L c\,\frac{dN_{yk}}{dx}\,N_{xs}\,dx\Bigg].\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

**5. Conclusions.** In the present paper it has been shown how it is possible to discuss the problem of vibrations of curved bars once that the solution of the corresponding problem for the straight bar is known. The method of approach in deriving the equations of motion being completely contained in the constraint equation (5) and in the application of *Hamilton* Principle, while the method of solving the equations being based on a perturbation method which utilizes as first approximation the solution of the straight case.

More general dynamic problems of elongated solids in which the inertia characteristics of the cross-section of the bar are known functions of the variable $x$ can be attacked and solved by the same method which has so far been demonstrated for the simple cases of bars having constant inertia characteristics.

**6. Appendix.** In order to prove the orthogonality properties expressed by equations (22) or (37) in the eigenfunctions $L_{xk}$, $N_{yk}$, or $M_{xk}$, $N_{zk}$ let

$$L_{xk} = X_k\,, \qquad M_{xk} = X_k$$

or

$$N_{yk} = Y_k\,, \qquad r_z = r; \qquad N_{zk} = Y_k; \qquad r_y = r\,.$$

Then equations (20) or (35) can be written

$$(\lambda + 2\,G)\,r^2\,\frac{d^2X_k}{dx^2} - G\,X_k - G\,\frac{dY_k}{dx} = -\,\varrho\,\omega_k^2\,r^2\,X_k\,, \qquad G\,\frac{d^2Y_k}{dx^2} + G\,\frac{dX_k}{dx} = -\,\varrho\,\omega_k^2\,Y_k\,. \tag{59}$$

Multiply the first of equations (59) by $X_j\,dx$, the second by $Y_j\,dx$ and integrate between 0 and $L$. Adding them together, one obtains, in view of the boundary conditions (21) or (36)

$$\left.\begin{aligned}-\varrho\,\omega_k^2\left(\int_0^L Y_k\,Y_j\,dx + r^2\int_0^L X_k\,X_j\,dx\right) &= -\,(\lambda + 2G)\,r^2\int_0^L \frac{dX_k}{dx}\,\frac{dX_j}{dx}\,dx\\ -G\int_0^L X_k\,X_j\,dx - G\int_0^L \frac{dY_k}{dx}\,X_j\,dx - G\int_0^L \frac{dY_k}{dx}\,\frac{dY_j}{dx}\,dx - G\int_0^L \frac{dY_j}{dx}\,X_k\,dx\,.&\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

In the same way one obtains for the jth mode

$$\left.\begin{aligned}-\varrho\,\omega_j^2\left(\int_0^L Y_j\,Y_k\,dx + r^2\int_0^L X_j\,X_k\,dx\right) &= -\,(\lambda + 2\,G)\,r^2\int_0^L \frac{dX_j}{dx}\,\frac{dX_k}{dx}\,dx\\ -G\int_0^L X_j\,X_k\,dx - G\int_0^L \frac{dY_j}{dx}\,X_k\,dx - G\int_0^L \frac{dY_j}{dx}\,\frac{dY_k}{dx}\,dx - G\int_0^L \frac{dY_k}{dx}\,X_j\,dx\,.&\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

By subtracting equation (61) from equation (60), one gets:

$$\varrho\,(\omega_j^2 - \omega_k^2)\left(\int_0^L Y_k\,Y_j\,dx + r^2\int_0^L X_k\,X_j\,dx\right) = 0$$

which if $\omega_k \neq \omega_j$ proves the orthogonality property expressed by equations (22) and (37).

In order to prove the orthogonality property expressed by equation (25) in the eigenfunctions $L_{yk}$, $M_{zk}$, $N_{xk}$, multiply the first of equations (23) by $L_{yj}\,dx$, the second by $M_{zj}\,dx$, the third by $N_{xj}\,dx$ and integrate between 0 and $L$ Adding them together, one obtains, in view of the boundary conditions (24)

$$\left.\begin{aligned}
&-\omega_k^2\,\varrho\left(r_z^2\int_0^L L_{yk}\,L_{yj}\,dx + r_y^2\int_0^L M_{zk}\,M_{zj}\,dx + \int_0^L N_{xk}\,N_{xj}\,dx\right)\\
&\quad = -G\,r_z^2\int_0^L \frac{dL_{yk}}{dx}\,\frac{dL_{yj}}{dx}\,dx - (\lambda+2G)\int_0^L L_{yk}\,L_{yj}\,dx\\
&-\lambda\int_0^L \frac{dN_{xk}}{dx}\,L_{yj}\,dx - \lambda\int_0^L M_{zk}\,L_{yj}\,dx\\
&-G\,r_y^2\int_0^L \frac{dM_{zk}}{dx}\,\frac{dM_{zj}}{dx} - \lambda\int_0^L L_{yk}\,M_{zj}\,dx - (\lambda+2G)\int_0^L M_{zk}\,M_{zj}\,dx\\
&-\lambda\int_0^L \frac{dN_{xk}}{dx}\,M_{zj}\,dx - (\lambda+2G)\int_0^L \frac{dN_{xk}}{dx}\,\frac{dN_{xj}}{dx}\,dx - \lambda\int_0^L \frac{dN_{xj}}{dx}\,L_{yk}\,dx\\
&\quad -\lambda\int_0^L \frac{dN_{xj}}{dx}\,M_{zk}\,dx\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

In the same way one obtains for the jth mode

$$\left.\begin{aligned}
&-\omega_j^2\,\varrho\left(r_z^2\int_0^L L_{yj}\,L_{yk}\,dx + r_y^2\int_0^L M_{zj}\,M_{zk}\,dx + \int_0^L N_{xj}\,N_{xk}\,dx\right)\\
&\quad = -G\,r_z^2\int_0^L \frac{dL_{yj}}{dx}\,\frac{dL_{yk}}{dx}\,dx - (\lambda+2G)\int_0^L L_{yj}\,L_{yk}\,dx\\
&-\lambda\int_0^L \frac{dN_{xj}}{dx}\,L_{yk}\,dx - \lambda\int_0^L M_{zj}\,L_{yk}\,dx - G\,r_y^2\int_0^L \frac{dM_{zj}}{dx}\,\frac{dM_{zk}}{dx}\,dx\\
&-\lambda\int_0^L L_{yj}\,M_{zk}\,dx - (\lambda+2G)\int_0^L M_{zj}\,M_{zk}\,dx - \lambda\int_0^L \frac{dN_{xj}}{dx}\,M_{zk}\,dx\\
&-(\lambda+2G)\int_0^L \frac{dN_{xj}}{dx}\,\frac{dN_{xk}}{dx}\,dx - \lambda\int_0^L \frac{dN_{xk}}{dx}\,L_{yj}\,dx - \lambda\int_0^L \frac{dN_{xk}}{dx}\,M_{zj}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

By subtracting equation (63) from equation (62), one gets

$$\varrho\,(\omega_j^2 - \omega_k^2)\left(r_z^2\int_0^L L_{yj}\,L_{yk}\,dx + r_y^2\int_0^L M_{zj}\,M_{zk}\,dx + \int_0^L N_{xj}\,N_{xk}\,dx\right) = 0$$

which if $\omega_j \neq \omega_k$ proves the orthogonality property expressed by equation (25).

In order to prove the orthogonality property expressed by equation (34) in the eigenfunctions $L_{zk}$ and $M_{yk}$ multiply the first of equations (32) by $L_{zj}\,dx$, the second by $M_{yj}\,dx$ and inte-

grate between 0 and $L$. Adding them together, one obtains, in view of the boundary conditions (33)

$$\left.\begin{aligned} -\omega_k^2 \varrho \int_0^L (r_z^2 L_{zk} L_{zj} + r_y^2 M_{yk} M_{yj})\, dx &= -G r_z^2 \int_0^L \frac{dL_{zk}}{dx} \frac{dL_{zj}}{dx} dx - G \int_0^L L_{zk} L_{zj}\, dx \\ -G \int_0^L I_{zj} M_{yk}\, dx - G \int_0^L M_{yk} M_{zj}\, dx - G r_y^2 \int_0^L \frac{dM_{yk}}{dx} \frac{dM_{yj}}{dx} dx - G \int_0^L M_{yk} M_{yj}\, dx & \\ -G \int_0^L L_{zk} M_{yj}\, dx\,. & \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

In the same way one obtains for the jth mode

$$\left.\begin{aligned} -\omega_j^2 \varrho \int_0^L (r_z^2 L_{zj} L_{zk} + r_y^2 M_{yj} M_{yk})\, dx &= -G r_z^2 \int_0^L \frac{dL_{zj}}{dx} \frac{dL_{zk}}{dx} dx - G \int_0^L L_{zj} L_{zk}\, dx \\ -G \int_0^l L_{zk} M_{yj}\, dx - G \int_0^L M_{yj} M_{zk}\, dx - G r_y^2 \int_0^L \frac{dM_{yj}}{dx} \frac{dM_{yk}}{dx} dx - G \int_0^L M_{yj} M_{yk}\, dx & \\ -G \int_0^L L_{zj} M_{yk}\, dx\,. & \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

By subtracting equation (65) from equation (64), one gets:

$$\varrho (\omega_j^2 - \omega_k^2) \int_0^L (r_z^2 L_{zk} L_{zj} + r_y^2 M_{yk} M_{yj})\, dx = 0$$

which, if $\omega_j \neq \omega_k$, proves the orthogonality property expressed by equation (34).

(Eingegangen am 6. Februar 1956.)

Anschrift des Verfassers: Prof. *E. Volterra* Troy, N. Y., 1567 Tibbits Ave., USA.

# On the form of a jet issuing from a swirl atomizer

By L. Valdenazzi

**1. Introduction.** A swirl atomizer is a simple device for breaking a liquid into small droplets and consists, in its simpler form, in a cylindrical (or „vortex") chamber with tangential inlets and a central outlet (fig. 1). The liquid is introduced into the chamber through the tangential inlets and issues from the central outlet with a tangential velocity component. This component, when sufficiently strong, causes the liquid to issue as a conical surface, formed by an unbroken liquid sheet (or „tulip") near the exit hole, and by droplets after a certain distance. The droplets are the result of the breaking of the liquid sheet under the action of the internal turbulence.

The experience has shown that the axial length of the unbroken tulip is related to the velocities within the liquid motion, i. e. to the pressure drop through the atomizer. The higher is this pressure drop, the nearer to the outlet hole does the jet break into droplets.

The liquid surface formed by droplets, in absence of external disturbing forces, such as gravity, the action of movements of the gas into which the jet is discharged, etc., is very nearly a circular cone, while in the case of unbroken tulip the surface tends to converge towards the jet axis; in the case of very small pressure drops through the atomizer, the tulip can actually become a bubble (fig. 2) without being able to break into drops.

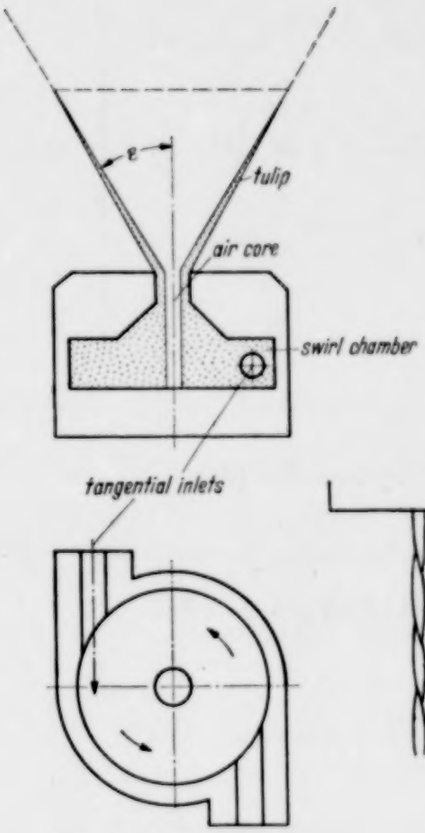


Fig. 1. A swirl atomizer.

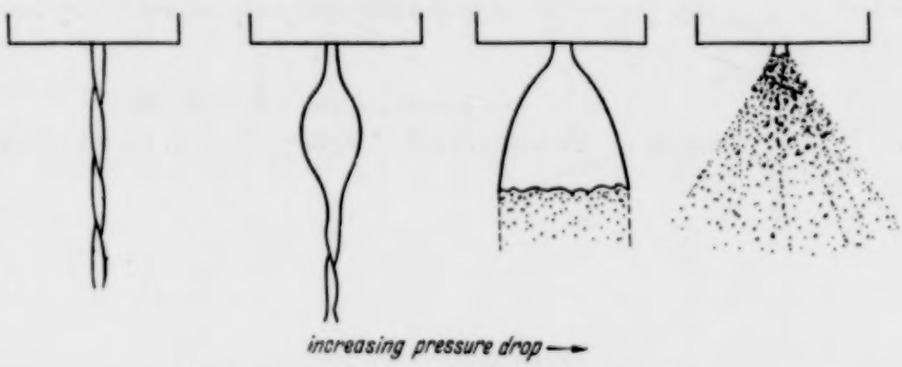


Fig. 2. Form of the jet issuing from a swirl atomizer.

A theory describing the form of the liquid cone has been put forth by *Soehngen* and *Grigull* [1]. In this theory the cone angle ($\varepsilon$ in fig. 1) is related to the ratio of the tangential and the axial velocity components at the atomizer outlet; both viscosity and surface tension of the liquid are not taken into account. The theory fails to agree with the observed results, even when the velocities are sufficiently high to support the assumption regarding the viscosity and surface tension. The main reason is to be traced down to the fact that the Authors have evaluated the velocity components at the outlet without taking into account the flow losses within the atomizer. When using correct values for the velocities, the *Soehngen* and *Grigull* theory gives better results, but only in the case of high pressure drops through the atomizer, i. e., when the jet breaks into droplets immediately at its exit. In the case of unbroken tulips, the influence of the surface tension is no longer to be neglected.

The present theory takes into account the surface tension, in addition to the liquid exit velocities, but not the viscosity. This latter, as the experience points out, does not need to be accounted for, because, if it were too high, it would not allow the very existence of a liquid

[1] *G. Söhngen*, Forschung auf dem Gebiet des Ing.-Wes., 17, 3 (1951), p. 77.

cone. In other words, the tulip forms at *Reynolds* number of the liquid flow sufficiently high to be neglected.

**2. Symbols.** Coordinate system: cylindrical, the jet axis being the system axis,

$r$ = radius,
$z$ = distance along the axis from the atomizer outlet,
$\varphi$ = angular coordinate,
$\varkappa = v_{1u} r_1$,
$s$ = liquid surface thickness,
$\boldsymbol{v}$ = velocity (vector), $v$ = velocity (scalar),
$C = \frac{v_{1u}}{v_{1m}}$,
$E$ = total energy of the unit mass,
$M$ = mass,
$N$ = see fig. 5,
$Q = 1 + \frac{1}{C}$,
$R = \frac{r}{r_1}$,
$S$ = surface,
$V$ = volumetric rate of flow,
$Z = \frac{z}{r_1}$,
$We$ = *Weber* number $= \frac{\varrho\, v_{1m}^2\, r_1}{\sigma}$,
$\alpha$ = see fig. 5,
$\varepsilon$ = conical surface angle (see fig. 2),
$\mu = \frac{s_1}{r_1}$,
$\varrho$ = density,
$\varrho'$ = mass of the unit surface,
$\sigma$ = surface tension (twice the experimental value),
$\chi$ = see fig. 5,
Consistent units throughout.

Subscripts: $u$ = periferal, $r$ = radial, $m$ = meridional, $z$ = axial, $1$ = atomizer outlet ($z = 0$).

**3. Theory.** a) Assumptions. The fundamental assumptions of the present theory are the following:

a) The liquid motion is permanent;
b) The liquid is inviscid;
c) The fluid motion is a constant energy motion;
d) The fluid into which the jet is discharged does not interfere with the motion, and it is at uniform pressure;
e) The liquid motion is symmetrical about the axis;
f) There is no velocity gradient along a radius of the revolution liquid surface, i. e. the velocity is a function only of the distance from the atomizer outlet.

b) The forces acting on the liquid. 1. *Inertia forces*: We will use a cylindrical coordinate system. Considering (fig. 3) an element of the unbroken liquid surface $ABCD$, let us investigate its equilibrium under the applied forces.

The inertia forces have the following components: radial component

$$dM\left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_u^2}{r}\right), \tag{1}$$

tangential component

$$dM\left(\frac{dv_u}{dt} + \frac{v_r\, v_u}{r}\right), \tag{2}$$

axial component

$$dM\left(\frac{dv_z}{dt}\right), \tag{3}$$

$dM$ being the mass of the surface element. The expressions in parentheses are the components, in the chosen coordinate system, of the acceleration vector $d\boldsymbol{v}/dt$.

2. *Surface tension forces*: As external forces we must consider only those caused by the surface tension, as the pressure, according to the assumptions made, is constant throughout. The surface tension forces acting on the boundaries of the surface element are [1]

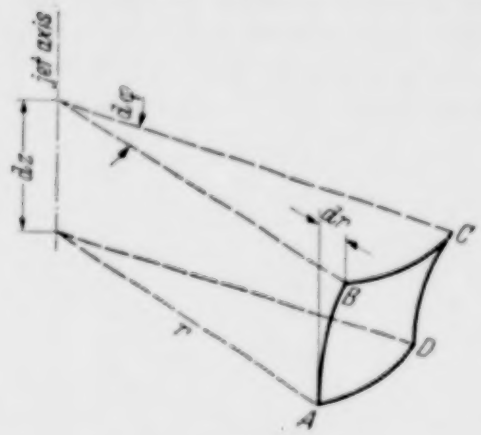


Fig. 3. An element of the liquid cone surface.

along $AB$

$$\sigma \sqrt{(dz)^2 + (dr)^2} = \sigma\, dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2},$$

along $DC$

$$-\sigma \sqrt{(dz)^2 + (dr)^2} = -\sigma\, dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2},$$

along $AD$

$$\sigma\, r\, d\varphi,$$

along $BC$

$$-\sigma\,(r + dr)\, d\varphi = -\sigma\, r\, d\varphi.$$

Of such forces we need the components along the coordinate directions.

As regards the forces acting on $AB$ and $DC$, we may observe that they are tangential to the fluid surface as well as normal to $AB$ and $DC$; they must therefore be tangential to the „parallels" of the revolution surface. Fig. 4 represents one of such parallels, with both resultants of the forces acting on $AB$ and $DC$; we may deduce therefore that the component along the radius of these forces is

$$-2\,\sigma\, dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} \cos\left(90^\circ - \frac{d\varphi}{2}\right) = -\sigma\, dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}\, d\varphi\,. \tag{4}$$

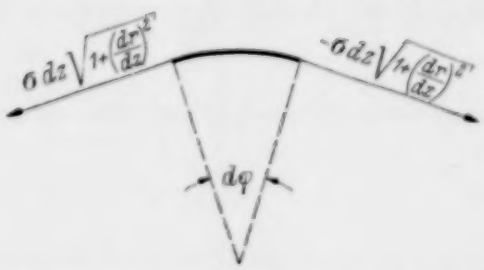


Fig. 4. The forces acting along the parallels of the liquid cone surface.

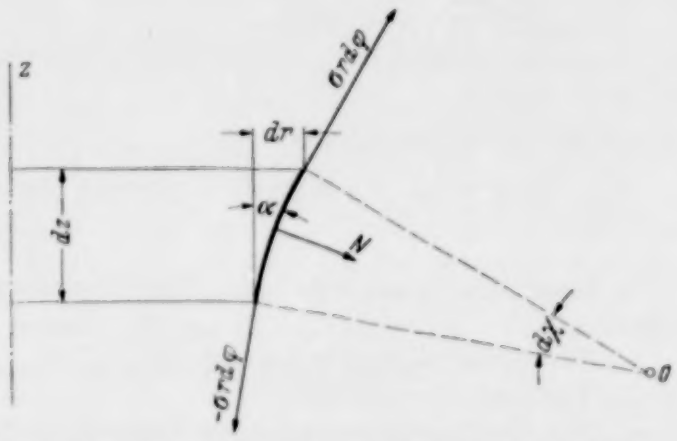


Fig. 5. The forces acting along the meridians of the liquid cone surface.

The forces acting on $BC$ and $AD$ are tangential to the revolution surface as well as normal to its „parallels"; they must be therefore tangential to the „meridians". The resultant of said forces is directed towards the curvature center 0 of the meridians (fig. 5) and has the value

$$N = \sigma\, r\, d\varphi\, d\chi$$

deducted as before. $N$ may be decomposed into two forces, one of which acting along the radius

$$N \cos\alpha = N \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}} = \sigma\, r\, d\varphi\, d\chi \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}$$

[1] The surface tension $\sigma$ must be taken twice the experimental value, the surfaces limiting the liquid sheet being two.

and the other acting along the direction of the axis

$$-N \sin \alpha = -\sigma\, r\, d\varphi\, d\chi \frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}.$$

We must now eliminate $d\chi$ from the preceding expressions; as the curvature of the meridian, in the point considered is given by

$$\frac{\frac{d^2r}{dz^2}}{\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}$$

as well as by

$$\frac{d\chi}{dz\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}},$$

we can deduce that

$$d\chi = dz \frac{\frac{d^2r}{dz^2}}{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}.$$

The component of $N$ along the radius is therefore

$$\sigma\, r\, d\varphi\, dz \frac{\frac{d^2r}{dz^2}}{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^{3/2}} \tag{5}$$

and that along the direction of the axis

$$-\sigma\, r\, d\varphi\, dz \frac{\frac{dr}{dz}\,\frac{d^2r}{dz^2}}{\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{6}$$

Concluding, the components along the coordinate directions of all surface tension forces are along $r$

$$-\sigma\, dz\, r\, d\varphi \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}\left\{\frac{1}{r}-\frac{\frac{d^2r}{dz^2}}{\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^2}\right\},$$

along $z$

$$-\sigma\, dz\, r\, d\varphi \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}\,\frac{\frac{dr}{dz}\,\frac{d^2r}{dz^2}}{\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^2}.$$

c) The equilibrium equations. If $\varrho'$ is the mass of the surface unit area, the mass $dM$ of the element considered is

$$dM = \varrho'\, dz\, r\, d\varphi \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2},$$

the equilibrium equations may therefore be written in the following from: equilibrium along the radius

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_u^2}{r} = -\frac{\sigma}{\varrho'}\left\{\frac{1}{r}-\frac{\frac{d^2r}{dz^2}}{\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^2}\right\}, \tag{7}$$

equilibrium along the periphery

$$\frac{dv_u}{dt} + \frac{v_r\, v_u}{r} = 0\,, \tag{8}$$

equilibrium along the direction of the axis

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{\sigma}{\varrho'} \frac{\dfrac{dr}{dz}\,\dfrac{d^2r}{dz^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dr}{dz}\right)^2\right]^2}\,. \tag{9}$$

We must now observe that $\varrho'$ is not a constant quantity. In fact, as the surface thickness is given by

$$s = \frac{V}{2\,\pi\, r\, v_m}$$

$V$ being the volumetric rate of flow out the atomizer, and $v_m$ the meridional velocity:

$$v_m = \sqrt{v_r^2 + v_z^2}\,,$$

the mass of the surface element considered is given by

$$dM = \varrho\, s\, dS = \frac{\varrho\, V}{2\,\pi\, r\, v_m}\, r\, d\varphi\, dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}$$

whence

$$\varrho' = \frac{\varrho\, V}{2\,\pi\, r\, v_m} = \frac{M'}{r\, v_m}\,.$$

As the motion is permanent, $V$ is a constant quantity, but $v_m$ il a function of $z$, so that also $\varrho'$ is a function of $z$.

The boundary conditions of the differential equilibrium equations are represented by the known values of the velocity components at the atomizer outlet, viz.

$$r = r_1\,, \quad z = 0\,, \quad v_u = v_{1\,u}\,, \quad v_z = v_m = v_{1\,m}\,,$$

as well as the thickness of the liquid surface at the outlet.

d) The integration of the equilibrium equations. 1. *The elimination of the peripheral velocity component*: Let us first consider eq. (8). As

$$dt = \frac{dr}{v_r}$$

we immediately have

$$v_r \frac{dv_u}{dr} + v_r \frac{v_u}{r} = 0$$

whence

$$v_u\, r = v_{1\,u}\, r_1 = \varkappa\,. \tag{10}$$

This result enable us to eliminate $v_u$ from eq. (7) and eq. (9). Introducing eq. (10) and $M'$ into eq. (7) and rearranging, we have

$$\frac{v_r}{v_m}\,\frac{dv_r}{dr} = \frac{1}{v_m}\,\frac{\varkappa^2}{r^3} - \frac{\sigma}{M'}\, r \left(\frac{1}{r} - \frac{\dfrac{d^2r}{dz^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dr}{dz}\right)^2\right]^2}\right) \tag{11}$$

similarly eq. (9) becomes

$$\frac{v_z}{v_m}\,\frac{dv_z}{dz} = -\frac{\sigma}{M'}\, r\, \frac{\dfrac{dr}{dz}\,\dfrac{d^2r}{dz^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dr}{dz}\right)^2\right]^2}\,. \tag{12}$$

Eq. (11) and eq. (12), when solved, would give $v_r$ and $v_z$ as functions of $r$ and $z$. As the ultimate aim of this theory is the equation of the fluid surface, we need a third equation to eliminate $v_r$ and $v_z$. This additional relationship is represented by the differential equation of the fluid

trajectories, viz.

$$\frac{v_r}{v_z} = \frac{dr}{dz}. \tag{13}$$

2. *The energy equation*: The direct solution of our problem, i.e. the simultaneous solution of the three differential equations (11), (12) and (13), presents great analytical difficulties. Fortunately, our initial assumption of constant energy motion enables us to overcome such difficulties.

Let us consider the energy stored in the surface element of fig. 3. There is a kinetic energy

$$\varrho\, s\, dS\, \frac{v^2}{2}$$

and a „superficial" energy

$$\sigma\, dS$$

the sum of both being a constant, i. e.

$$\varrho\, s\, dS\, \frac{v^2}{2} + \sigma\, dS = \varrho\, s_1\, dS_1\, \frac{v_1^2}{2} + \sigma\, dS_1\,. \tag{14}$$

If we follow a given element during its motion, its volume remaining unaltered, we may write

$$s\, dS = s_1\, dS_1$$

so that, dividing eq. (14) by this quantity, and rearranging, we obtain

$$\varrho\, \frac{v^2}{2} + \frac{\sigma}{s} = \varrho\, \frac{v_1^2}{2} + \frac{\sigma}{s_1}.$$

The continuity equation ruling that

$$s = \frac{V}{2\pi r\, v_m},$$

we may finally write the equation energy in the form

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\sigma}{M'} r\, v_m = \frac{v_1^2}{2} + \frac{\sigma}{M'} r_1\, v_{1m} \tag{15}$$

that we shall use from now on.

3. *The solution of the equilibrium equations*: Let us consider again eq. (11), (12) and (13), and eliminate the time $t$ from them. As

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad v_m = \frac{dm}{dt}$$

and

$$dm = \sqrt{(dz)^2 + (dr)^2} = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2},$$

we may write

$$\frac{v_r}{v_m} = \frac{dr}{dm} = \frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}},$$

$$\frac{v_z}{v_m} = \frac{dz}{dm} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}$$

and substituting the latter equation into eq. (11) and eq. (12), we obtain the following equations in which the time variable is no longer present:

$$\frac{dv_r}{dr} \frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}} = \frac{1}{v_m} \frac{\varkappa^2}{r^3} - \frac{\sigma}{M'} r \left\{ \frac{1}{r} - \frac{\frac{d^2r}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^2} \right\}, \tag{16}$$

$$\frac{dv_z}{dz}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}} = -\frac{\sigma}{M'}\,r\,\frac{\frac{dr}{dz}\,\frac{d^2r}{dz^2}}{\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^2}. \tag{17}$$

We must observe now, as

$$v^2 = v_m^2 + v_u^2 = v_m^2 + \frac{\varkappa^2}{r^2}$$

that the energy equation (15) represents a relationship between $v_m$ and $r$. It may be used therefore to eliminate one of the eq. (16) and (17).

By differentiating the energy equation (15) we first obtain

$$v\,dv + \frac{\sigma}{M'}(r\,dv_m + v_m\,dr) = v_u\,dv_u + v_m\,dv_m + \frac{\sigma}{M'}(r\,dv_m + v_m\,dr) = 0$$

whence after some rearranging, we get

$$dv_m = \frac{\frac{\varkappa^2}{r^3} - \frac{\sigma}{M'}v_m}{v_m + \frac{\sigma}{M'}r}\,dr\,. \tag{18}$$

Moreover, as the velocities are tangential to their trajectories, we may write

$$v_z = v_m \cos\alpha = v_m\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}},$$

$$v_r = v_m \sin\alpha = v_m\,\frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}.$$

As

$$\frac{dv_m}{dz} = \frac{dv_m}{dr}\,\frac{dr}{dz},$$

the derivative of the first of these equations may be written in the following form:

$$\frac{dv_z}{dz} = \frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}\left\{\frac{dv_m}{dr} - v_m\,\frac{\frac{d^2r}{dz^2}}{\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]}\right\}$$

whence

$$\frac{dv_z}{dz}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}} = \frac{\frac{dr}{dz}}{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}\left\{\frac{dv_m}{dr} - v_m\,\frac{\frac{d^2r}{dz^2}}{\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]}\right\}. \tag{19}$$

Substituting now eq. (19) together with eq. (18) into eq. (17) we finally obtain, after some rearrangement

$$\frac{\frac{d^2r}{dz^2}}{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2} = \frac{\frac{\varkappa^2}{r^3} - \frac{\sigma}{M'}v_m}{v_m^2 - \frac{\sigma^2}{M'^2}r^2} = f(r) \tag{20}$$

which is the differential equation of the liquid surface. Provided the function $f(r)$ is known, its integration is quite easy. In fact, as it is

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = 2\,\frac{dr}{dz}\,\frac{d^2r}{dz^2},$$

$$d\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = 2\,\frac{d^2r}{dz^2}\,dr$$

eq. (20) becomes

$$\frac{d\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2} = 2\,f(r)\,dr\,.$$

Integrating between $r_1$ and $r$ we obtain

$$\ln\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right] = 2\int_{r_1}^{r} f(r)\,dr \tag{21}$$

whence

$$\frac{dr}{dz} = \sqrt{e^{2\int_{r_1}^{r} f(r)\,dr} - 1} = \psi(r) \tag{22}$$

and, after another integration

$$z = \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\psi(r)} \tag{23}$$

which is the required analytical equation of the liquid surface.

4. *The function $f(r)$.* We must now eliminate $v_m$ from eq. (20) in order to obtain the function $f(r)$. The relationship between $v_m$ and $r$ is given by the energy equation (15). If $E$ is the constant value of the total energy

$$\frac{v_m^2}{2} + \frac{v_a^2}{2} + \frac{\sigma}{M} r\,v_m = E$$

we have from this equation

$$v_m = -\frac{\sigma}{M'} r \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{M'^2} r^2 - \left(\frac{\varkappa^2}{r^2} - 2E\right)}\,.$$

The quantity between parentheses is certainly negative, as $\frac{\varkappa^2}{r^2} < E$. The radical is therefore greater than $\frac{\sigma}{M'} r$, and we must choose the $+$ sign, if $v_m$ is to be positive. Substituting $v_m$ into eq. (20) we have

$$f(r) = \frac{1}{r}\,\frac{\frac{\varkappa^2}{r^3} + \frac{\sigma^2}{M'^2} r - \frac{\sigma}{M'}\sqrt{\frac{\sigma^2}{M'^2} r^2 - \left(\frac{\varkappa^2}{r^2} - 2E\right)}}{\frac{\sigma^2}{M'^2} r - \left(\frac{\varkappa^2}{r^3} - \frac{2E}{r}\right) - 2\,\frac{\sigma}{M'}\sqrt{\frac{\sigma^2}{M'^2} r^2 - \left(\frac{\varkappa^2}{r^2} - 2E\right)}}\,. \tag{24}$$

It is obvious that the expression of $f(r)$ is too complicated to permit the effectuation of the integration of eq. (21) analytically. The solution of our problem must be necessarily numerical.

5. *Reduction to dimensionless quantities*: By reducing the worked out relationships to dimensionless form, we have the advantage of bringing the number of the indipendent quantities to a minimum.

A simple control of the dimensions of the various formulae shows that the integral

$$\int f(r)\,dr$$

is already a dimensionless quantity, as well as $\psi(r)$. $f(r)$ has the dimensions of the inverse of a length, and the second fraction of eq. (24) is therefore a dimensionless quantity. We want now to reduce to dimensionless form also the quantities entering into its expression. Observing that

$$M' = \frac{\varrho\,V}{2\pi} = \frac{\varrho\,v_{1m}\,s_1\,2\pi\,r_1}{2\pi} = \varrho\,v_{1m}\,s_1\,r_1$$

and assuming

$$s_1 = \mu\,r_1$$

where $\mu$ must be considered a known quantity, we obtain

$$\frac{\sigma}{M'} = \frac{\sigma}{\varrho\, v_{1m}\, r_1}\,\frac{1}{\mu\, r_1}$$

whence

$$\frac{\sigma}{M'} = \frac{1}{We}\,\frac{v_{1m}}{\mu\,\varrho_1}$$

the dimensionless quantity $We$ being the „Weber number"

$$We = \frac{\varrho\, v_{1m}^2\, r_1}{\sigma}\,.$$

Let us write moreover

$$\frac{v_{1u}}{v_{1m}} = C\,, \qquad \frac{r_1}{r} = R$$

the expression of the energy $E$ then becomes

$$E = \frac{v_1^2}{2} + \frac{\sigma}{M'}\, r_1\, v_{1m} = \frac{v_{1m}^2}{2} + \frac{v_{1u}^2}{2} + \frac{1}{We}\,\frac{v_{1m}^2}{\mu}$$

whence

$$\frac{2\,E}{v_{1m}^2} = 1 + C^2 + \frac{2}{\mu}\,\frac{1}{We}\,.$$

By introducing all these quantities into eq. (24), and rearranging, we obtain

$$f(r) = \frac{1}{r}\,\frac{\dfrac{C^2}{R^3} + \dfrac{R}{\mu^2\, We^2} - \dfrac{1}{\mu\, We}\sqrt{\dfrac{R^2}{\mu^2\, We^2} + C^2\left(1 - \dfrac{1}{R^2}\right) + 1 + \dfrac{2}{\mu\, We}}}{\dfrac{1}{R}\left[\dfrac{R^2}{\mu^2\, We^2} + \left(1 - \dfrac{1}{R^2}\right)C^2 + 1 + \dfrac{2}{\mu\, We}\right] - \dfrac{2}{\mu\, We}\sqrt{\dfrac{R^2}{\mu^2\, We^2} + C^2\left(1 - \dfrac{1}{R^2}\right) + 1 + \dfrac{2}{\mu\, We}}} = \frac{1}{r} f'(R)\,. \tag{25}$$

Integral (21) becomes

$$2\int_{r_1}^{r} f(r)\, dr = 2\int_{1}^{R} \frac{dR}{R} f'(R) \tag{26}$$

and writing

$$Z = \frac{z}{r_1}$$

we have

$$\frac{dr}{dz} = \frac{dR}{dZ} = \sqrt{e^{\,2\int_1^R \frac{dR}{R} f'(R)} - 1}$$

and finally

$$Z = \int_1^R \frac{dR}{\sqrt{e^{\,2\int_1^R \frac{dR}{R} f'(R)} - 1}} \tag{27}$$

which is the dimensionless equation of the liquid surface. The parameters from which the function $Z = Z(R)$ depends are $\mu$, $C$ and the *Weber* number.

6. *The case of very great Weber numbers.* When the *Weber* number is very great, i. e. when the surface tension forces are negligible in comparison with the inertia forces, we may write

$$\frac{f'(R)}{R} = \frac{1}{R\left[R^2\left(1 + \dfrac{1}{C^2}\right) - 1\right]}$$

and eq. (26) can be integrated analytically:

$$2\int_{1}^{R}\frac{f'(R)}{R}\,dR = \ln\frac{1}{R^2}\,\frac{R^2-Q^2}{1-Q^2}$$

where

$$\frac{1}{Q^2} = 1 + \frac{1}{C^2}.$$

Substituting this result into eq. (27) we finally obtain

$$Z = \frac{\sqrt{R^2-1}}{C}. \tag{28}$$

In this case the meridional section of the liquid surface is a hyperbola (fig. 6). The inclination of its asymptote with respect to the axis is $\varepsilon$.

Eq. (28) has been found, as stated in the introduction, by *Söhngen* and *Grigull* in their elementary theory of the liquid surface form.

Fig. 6. Form of the jet when the surface tension is negligible.

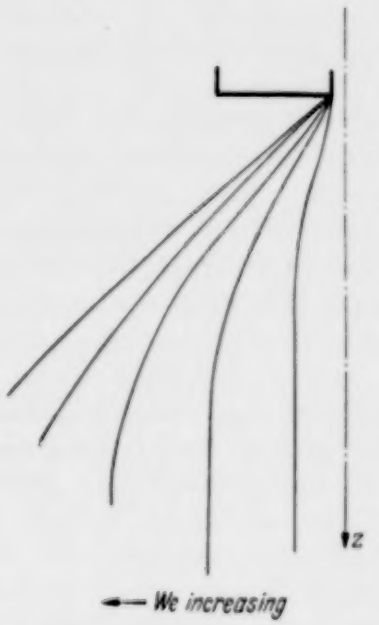


Fig. 7. Form of the jet at various *Weber* numbres.

4. **Applications.** As we have stated before, the determination of $f'(R)$ is numerical. When the values of $f'(R)$ for a given range of $R$ values, starting from unity, are calculated, the integration of eq. (26) is carried out numerically or graphically, and presents no difficulties, nor the subsequent calculations resulting in the $Z$ values.

For given values of $\mu$ and $C$, it is interesting to analyze the influence of the *Weber* number on the jet form. A number of liquid surfaces, characterized by fixed values of $\mu$ and $C$ and by increasing *Weber* numbers, are represented in fig. 7, the inner surfaces corresponding to the lower *Weber* numbers. As it will be seen, at a certain distance from the atomizer outlet, the jet surface becomes cylindrical, the centrifugal forces due to the $v_u$ component being balanced by the surface tension. Actually, either the jet breaks into droplets before becoming cylindrical (and the droplets successively move on a conial surface) or the drag of the gas into which the jet is discharged (in the case of small $v_u$ components) causes it to converge towards the axis, forming a bubble.

In order to control the accuracy of the theoretical results in comparison with the experimental ones, this theory has been applied to calculate the cone angle of the jet issuing from an atomizer tested by *Soehngen* and *Grigull* (atomizer 5 II). The calculation of $\mu$ and $C$ has been carried out on the basis of the experiments of *Doumas* and *Laster*[1].

[1] *L. Doumas*, Chemical Engineering Progress, 49, 10 (1953) p. 518.

In fig. 8 a comparison is made between the calculated and the experimental values. The agreement is good, the theoretical values, not taking into account the drag of the air entrained by the jet, being greater than the experimental ones. The difference is increasing for the higher rates of flow, where the drag is likely to be more pronounced.

In this particular comparison, the *Weber* numbers being rather high, the liquid jet is unbroken only for a short stretch from the atomizer outlet, and the measured cone angle refers to the

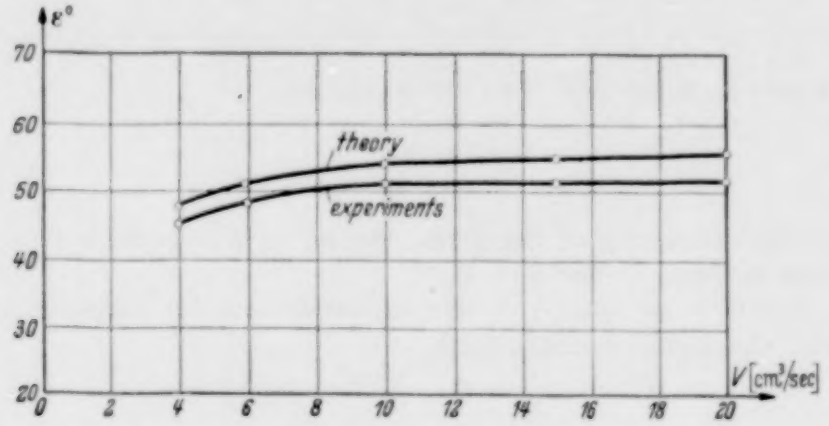


Fig. 8. Comparison between experimental and calculated values of the liquid cone angle.

surface made by droplets. No difficulties have however been met in assessing the theoretical angle $\varepsilon$, because the calculated surface is very nearly a cone at a short distence from the atomizer outlet. For lower *Weber* numbers, however, in order to compare theoretical with experimental values, it is necessary to evaluate the distance, from the atomizer, where the liquid surface breaks into droplets. Experimental values on this distance, in dimensionless form, are to be found in a paper by *Weinberg*[1].

(Eingegangen am 11. Februar 1956.)

Anschrift des Verfassers: Prof. *L. J. Valdenazzi*, Genova (Italien) University of Engineering Via Montallegro 1

[1] *Weinberg*, Proc. Inst. Mech. Eng., 1B, (1952—53), p. 240.

# Stationäre Schwingungen in nichtlinearen dynamischen Systemen mit Totzeiten*

Von K. Magnus

**1. Einführung.** In Regelkreisen treten häufig Glieder auf, die mit Totzeiten behaftet sind. Bei ihnen verstreicht aus irgendwelchen gerätetechnischen Gründen stets eine gewisse Zeit — die Totzeit, auch Laufzeit genannt —, bis sich eine am Eingang des Gliedes auftretende Ursache als Wirkung im Ausgang bemerkbar macht. Soll beispielsweise das Mischungsverhältnis zweier Flüssigkeiten oder Gase auf Grund von Messungen an der Mischung geregelt werden, so darf die Messung selbst erst nach einer gewissen Mindestmischstrecke erfolgen. Die zum Durchlaufen der Mischstrecke gebrauchte Zeit geht als Totzeit in den Regelvorgang ein. Bei Verwendung von elektrischen Relaiseinrichtungen verstreicht zwischen dem Einschalten des Steuerstromes und der Kontaktgabe eine Ansprechzeit, die als Totzeit zu betrachten ist.

Mathematisch macht sich das Auftreten von Totzeiten dadurch bemerkbar, daß in den Differentialgleichungen Glieder vorkommen, bei denen das Argument um den Betrag der Totzeit in der Zeitachse verschoben ist. Die Gleichungen bilden dann ein System von einfachen Funktional-Differentialgleichungen, deren Lösungsmannigfaltigkeit im allgemeinen viel größer ist als bei demselben System ohne Totzeiten. Für lineare Systeme mit verzögerten Argumenten liegen zahlreiche Untersuchungen vor. *Perron*[1] und *E. Schmidt*[2] untersuchten Systeme $n$-ter Ordnung und gewinnen durch Diskussion der Wurzeln einer transzendenten charakteristischen Gleichung Bedingungen für den allgemeinen Charakter der vorhandenen Lösungen. *Collatz*[3] behandelt ein System zweiter Ordnung und gibt Stabilitätsbereiche in Abhängigkeit von den Systemparametern an. *Hahn*[4] gelingt es, für dasselbe System die Lösungen in Form konvergenter Reihen abzuleiten. Die Anwendung der eleganten Verfahren der *Laplace*-Transformation zur Lösung von Totzeitproblemen findet man bei verschiedenen Autoren z. B. *Bulgakow*[5], *Küpfmüller*[6] und *Oldenbourg-Sartorius*[7].

Der einzige, dem Verfasser bekannt gewordene Versuch, auch nichtlineare Systeme mit Totzeitgliedern zu behandeln, findet sich in einer Arbeit von *Popow*[8], die sich mit der Anwendung des von *Krylow* und *Bogoljubow* angegebenen Verfahrens der „Harmonischen Balance" auf Systeme beliebiger Ordnung beschäftigt. Unter Verwendung der *Nyquist*schen Stabilitätskriterien gewinnt *Popow* Bestimmungsgleichungen für Amplitude und Frequenz von eventuell vorhandenen Dauerschwingungen. In einer früheren Arbeit[9] konnte gezeigt werden, daß sich durch Kombination des Ansatzes von *Krylow-Bogoljubow* mit den *Routh-Hurwitz*schen Stabilitätskriterien ein sehr allgemein anwendbares Verfahren zur Bestimmung der wichtigsten Systemeigenschaften ableiten läßt. Das Ziel der jetzigen Untersuchungen ist der Nachweis, daß durch eine geringfügige Modifikation des *Popow*schen Ansatzes nun auch Totzeitprobleme in das früher gegebene Schema eingeordnet werden können. Es läßt sich also auch bei Auftreten von Totzeiten ein lineares Ersatzsystem ableiten, das keine Funktional-Differentialgleichungen enthält und zu dessen Lösung bekannte Methoden verwendet werden können.

Der Ansatz der Harmonischen Balance liefert eine über die Möglichkeiten der Methode der „Kleinen Schwingungen" erheblich hinausgehende Theorie der ersten Näherung, die insbesondere dann vorteilhaft verwendet werden kann, wenn in den zu untersuchenden Systemen stationäre

* Diese Untersuchungen wurden im Rahmen eines Forschungsprogrammes durchgeführt, für dessen Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft zu danken ist.

[1] *O. Perron*, Math. Z. 45 (1939), S. 127.

[2] *E. Schmidt*, Math. Ann. 70 (1911), S. 499.

[3] *L. Collatz*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947), S. 60.

[4] *W. Hahn*, Z. angew. Math. Mech. 34 (1954), S. 316.

[5] *B. W. Bulgakow*, Schwingungen, Bd. I, Kap. 4. Moskau 1949.

[6] *K. Küpfmüller*, Tagungsheft „Die *Laplace*-Transformation und ihre Anwendung in der Regelungstechnik". München 1955.

[7] *R. C. Oldenbourg* und *H. Sartorius*, Dynamik selbsttätiger Regelungen. München 1944.

[8] *E. P. Popow*, Doklady Akad. Nauk SSSR. 98 (1954), S. 545.

[9] *K. Magnus*, VDI-Forschungsheft Nr. 451. Düsseldorf 1955.

Schwingungen auftreten können. Die im allgemeinen nichtharmonischen Schwingungen werden bei diesem Verfahren durch die Grundharmonische ihrer *Fourier*zerlegung ersetzt. Die Fehler des Verfahrens werden um so geringer sein, je weniger die Schwingungen von der Sinusform abweichen. Allgemeingültige Fehlerabschätzungen sind zwar bisher noch nicht gelungen, doch zeigte die Berechnung einiger auch streng zugänglicher Sonderfälle, daß die Fehler meist erstaunlich gering sind, selbst dann, wenn wegen starker Abweichungen der Schwingungen von der Sinusform die Brauchbarkeit des Näherungsansatzes von vornherein nicht feststeht. Wenn in einem System harmonische Schwingungen möglich sind — wie es im allgemeinen bei linearen Totzeitproblemen der Fall ist —, dann ist auch die Lösung des linearen nicht funktionalen Ersatzsystems streng gültig.

**2. Herstellung eines linearen Ersatzsystems.** Wie in der bereits erwähnten früheren Arbeit gezeigt wurde, kann man für ein System ohne Totzeit, das durch die Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{n} f_{i\nu}(x_\nu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

mit den nichtlinearen Funktionen $f_{i\nu}$ beschrieben wird, ein lineares Ersatzsystem

$$\dot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{n} (a_{i\nu}\, x_\nu + a^*_{i\nu}\, \dot{x}_\nu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

angeben, dessen Koeffizienten durch eine Integraltransformation aus den nichtlinearen Funktionen gewonnen werden:

$$a_{i\nu} = \frac{1}{\pi A_\nu} \int_0^{2\pi} f_{i\nu}(A_\nu \sin\varphi) \sin\varphi \, d\varphi = K_s\{f_{i\nu}\}\,, \tag{3}$$

$$a^*_{i\nu} = \frac{1}{\pi A_\nu \omega} \int_0^{2\pi} f_{i\nu}(A_\nu \sin\varphi) \cos\varphi \, d\varphi = K_c\{f_{i\nu}\}\,. \tag{4}$$

Diese kurz als $K$-Transformation bezeichnete Operation verwandelt die Funktionen $f_{i\nu}$ der Variablen $x_\nu$ in die Funktionen $a_{i\nu}$ bzw. $a^*_{i\nu}$ der Variablen $A_\nu$. Die Transformationsformeln (3) und (4) werden durch Einsetzen des harmonischen Ansatzes

$$x_\nu = A_\nu \sin(\omega t - \psi_\nu) \tag{5}$$

in die beiden Systeme (1) und (2) gewonnen. Bei harmonischer Veränderung der Argumente $x_\nu$ werden auch die auf den rechten Seiten von (1) stehenden Funktionen $f_{i\nu}(x_\nu)$ periodische Funktionen der Zeit sein, die in *Fourier*reihen zerlegt werden können. Berücksichtigt man von dieser Zerlegung nur jeweils das erste Glied, also die Grundharmonische, so kommt man durch einen Koeffizientenvergleich der rechten Seiten von (1) und (2) zu den angegebenen Transformationsformeln (3) und (4).

Dieser Ansatz kann nun in einfacher Weise auch für Systeme mit verzögerten Argumenten erweitert werden. Wenn die einzelnen Argumente $x_\nu$ die Totzeiten $\tau_\nu$ haben, so hat man an Stelle von (1) das System:

$$\dot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{n} f_{i\nu}\,[x_\nu(t - \tau_\nu)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{6}$$

Als Ersatzsystem wird auch jetzt wieder der frühere Ansatz (2) gewählt, nur sind für die Koeffizienten an Stelle von (3) und (4) andere Bestimmungsgleichungen abzuleiten. Geht man mit dem Ansatz (5) in die rechten Seiten von (6) ein, so erhält man wieder periodische Funktionen der Zeit, die sich in eine *Fourier*reihe zerlegen lassen. Bei Vernachlässigung der höheren Harmonischen dieser Entwicklungen ergibt der Koeffizientenvergleich mit den rechten Seiten von (2) die Bestimmungsgleichungen

$$a_{i\nu} = \frac{1}{\pi A_\nu} \int_0^{2\pi} f_{i\nu}\,[A_\nu \sin\omega(t - \tau_\nu)] \sin\omega t \, d(\omega t)\,, \tag{7}$$

$$a^*_{i\nu} = \frac{1}{\pi A_\nu \omega} \int_0^{2\pi} f_{i\nu}\,[A_\nu \sin\omega(t - \tau_\nu)] \cos\omega t \, d(\omega t)\,. \tag{8}$$

Setzt man darin

$$\sin \omega t = \sin [\omega (t - \tau_\nu) + \omega \tau_\nu]$$
$$= \sin \omega (t - \tau_\nu) \cos \omega \tau_\nu + \cos \omega (t - \tau_\nu) \sin \omega \tau_\nu ,$$

so folgt unmittelbar aus (7)

$$a_{i\nu} = \frac{1}{\pi A_\nu} \int_0^{2\pi} f_{i\nu} [A_\nu \sin \omega (t - \tau_\nu)] \sin \omega (t - \tau_\nu) \cos \omega \tau_\nu \, d(\omega t)$$

$$+ \frac{1}{\pi A_\nu} \int_0^{2\pi} f_{i\nu} [A_\nu \sin \omega (t - \tau_\nu)] \sin \omega (t - \tau_\nu) \sin \omega \tau_\nu \, d(\omega t)$$

oder

$$a_{i\nu} = \cos \omega \tau_\nu K_s \{f_{i\nu}\} + \omega \sin \omega \tau_\nu K_c \{f_{i\nu}\} ; \tag{9}$$

denn bei der Ausführung der Integration ist die Verschiebung des Integrationsbereiches um den Betrag $\omega \tau_\nu$ ohne Belang. Entsprechend folgt durch Einsetzen von

$$\cos \omega t = \cos \omega (t - \tau_\nu) \cos \omega \tau_\nu - \sin \omega (t - \tau_\nu) \sin \omega \tau_\nu$$

in (8)

$$a^*_{i\nu} = \frac{1}{\pi A_\nu \omega} \int_0^{2\pi} f_{i\nu} [A_\nu \sin \omega (t - \tau_\nu)] \cos \omega (t - \tau_\nu) \cos \omega \tau_\nu \, d(\omega t)$$

$$+ \frac{1}{\pi A_\nu \omega} \int_0^{2\pi} f_{i\nu} [A_\nu \sin \omega (t - \tau_\nu) \sin \omega (t - \tau_\nu) \sin \omega \tau_\nu \, d(\omega t)$$

oder

$$a^*_i = \cos \omega \tau_\nu K_c \{f_{i\nu}\} - \frac{\sin \omega \tau_\nu}{\omega} K_s \{f_{i\nu}\} . \tag{10}$$

Die Koeffizienten des linearen Ersatzsystems (2) sind nunmehr grundsätzlich frequenzabhängig, während eine Frequenzabhängigkeit bei Systemen ohne Totzeiten nur dann auftrat, wenn Funktionen $f_{i\nu}$ vom Hysteresetyp vorhanden waren.

Das lineare Ersatzsystem ergibt in bekannter Weise eine charakteristische Gleichung

$$|a_{i\nu} + a^*_{i\nu} \lambda - \delta_{i\nu} \lambda| = \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu} \lambda^\nu = 0 , \tag{11}$$

deren Koeffizienten $c_\nu$ für die weitere Rechnung gebraucht werden. $\delta_{i\nu}$ ist das bekannte *Kronecker*-symbol ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{i\nu} = 0$ für $i \neq \nu$).

**3. Dauerschwingungen und ihre Stabilität.** Dauerschwingungen treten auf, wenn die Koeffizienten von (2) solche Werte annehmen, daß sich das System gerade auf der Stabilitätsgrenze befindet. Legt man die *Routh-Hurwitz*schen Stabilitätskriterien zugrunde, so muß $H_\nu > 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n-2$), aber

$$R = H_{n-1} = 0 \tag{12}$$

sein[1]. $R$ ist die *Routh*sche Diskriminante, $H_\nu$ sind die *Hurwitz*determinanten. Die auf der Stabilitätsgrenze geltenden Frequenzen $\omega_s$ bekommt man in einfacher Weise aus

$$\omega_s^2 = \frac{c_n H_{n-3}}{H_{n-2}} \qquad (H_0 = 1;\ n \geq 3) , \tag{13}$$

wobei $c_n$ das konstante Glied der charakteristischen Gleichung (11) ist[2]. Die Beziehungen (12) und (13) enthalten als Unbekannte die $n+1$ Größen $\omega_s$ und $A_\nu$. Will man diese bestimmen, so sind also weitere $n-1$ Gleichungen notwendig, die sich aus dem linearen Ersatzsystem

[1] Vgl. Fußnote 9 von S. 341, dort Kap. 2.2.
[2] *L. Cremer*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947), S. 161.

unschwer ableiten lassen. Es sind die $n-1$ voneinander unabhängigen Verhältnisse der Amplituden $A_\nu$, die wie folgt gewonnen werden können:

Mit dem Ansatz

$$x_\nu = A_\nu e^{\lambda t}$$

folgt aus (2)

$$A_i \lambda = \sum_{\nu=1}^{n} (a_{i\nu} A_\nu + a^*_{i\nu} A_\nu \lambda) . \tag{14}$$

Wählt man $A_n$ als Bezugsamplitude und bildet die Amplitudenverhältnisse

$$\varkappa_i = \frac{A_i}{A_n} , \qquad \varkappa_n = 1 ,$$

so folgt ein inhomogenes lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der $n-1$ Größen $\varkappa_i$:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \varkappa_\nu (a_{i\nu} + a^*_{i\nu} \lambda - \delta_{i\nu} \lambda) = - a_{in} - a^*_{in} \lambda \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) . \tag{15}$$

Für $\lambda$ ist dabei

$$\lambda = j \omega_s , \qquad (j = \sqrt{-1}) ,$$

mit $\omega_s$ aus (13) einzusetzen.

Die Lösung von (15) ist

$$\varkappa_\nu = \frac{D_\nu}{D_N} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) , \tag{16}$$

mit der Nennerdeterminante

$$D_N = |a_{i\nu} + j \omega_s a^*_{i\nu} - \delta^*_{i\nu})| .$$

Die Zählerdeterminante $D_\nu$ folgt aus $D_N$, wenn dort an Stelle der $\nu$. Spalte der Wert $(- a_{in} - j a^*_{in} \omega_s)$ eingesetzt wird. Die Indizes $i$ und $\nu$ laufen jeweils von 1 bis $n-1$.

Die Werte $\varkappa_\nu$ für die Amplitudenverhältnisse sind komplex, d. h. zwischen den Maximalamplituden der einzelnen Koordinaten existieren irgendwelche Phasenverschiebungen, die aus dem Verhältnis von Imaginärteil zum Realteil leicht ausgerechnet werden könnten. Sie sind in unserem Falle jedoch unwichtig, da die Phasenwinkel bei der Durchführung der $K$-Transformationen (3) und (4) lediglich eine Verschiebung des Integrationsbereiches verursachen, also auf das Ergebnis keinen Einfluß haben. Wir interessieren uns daher weiterhin nur für die Beträge der Amplitudenverhältnisse und setzen

$$|A_\nu| = |\varkappa_\nu| A_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) , \tag{17}$$

wobei $A_n$ als Bezugsamplitude natürlich reell angenommen werden kann.

Mit (12), (13) und (17) hat man nunmehr $n+1$ Gleichungen zur Bestimmung der $n+1$ Unbekannten, also der Frequenz und der Amplitudenverteilung von Dauerschwingungen zur Verfügung.

Um auch die Stabilität der Dauerschwingungen beurteilen oder die Frage beantworten zu können, ob ein gegebenes System bzw. seine Stabilitätsgrenze gefährlich oder ungefährlich ist (im Sinne des von *Bautin* eingeführten Gefährlichkeitsbegriffes), muß auch das Verhalten in der Nachbarschaft der Stabilitätsgrenzen untersucht werden. In dieser Nachbarschaft ist (12) nicht mehr erfüllt. Auch die Frequenz (13) gilt nicht mehr streng, jedoch wird dieser Wert für die weitere Rechnung beibehalten. Es wird also für Amplitudenwerte, die nicht den oben ausgerechneten Werten von Dauerschwingungen entsprechen, für die Frequenz derjenige Wert eingesetzt, der sich ergeben würde, wenn die gewählte Amplitude zu einer Dauerschwingung gehörte, wenn sich also das System genau auf der Stabilitätsgrenze befinden würde. Dieser Näherungsansatz macht die weitere Rechnung erst möglich. Er hat zur Folge, daß die für eine Umgebung der Stabilitätsgrenze erhaltenen Aussagen quantitativ etwas verfälscht werden, jedoch werden Fragen qualitativen Charakters wie z. B. die nach der Stabilität und der Gefährlichkeit in richtiger Weise beantwortet.

Um das Verhalten eines Systems in der Umgebung der Stabilitätsgrenze untersuchen zu können, müssen Veränderungen der Amplituden $A_\nu$ betrachtet werden. Da die Koeffizienten $a_{i\nu}$ und $a^*_{i\nu}$ nach (3) und (4) Funktionen der $A_\nu$ sind, so kann man (17) auch als $n-1$ Beziehungen

zwischen den Amplituden $A_\nu$ auffassen:

$$f_\nu(A_1, A_2, \ldots, A_n) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{18}$$

wobei (13) zu berücksichtigen ist, da auch $\omega_s$ in (17) vorkommt.

Die Lösungen des Gleichungssystems (18) seien

$$A_\nu = g_\nu(A_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{19}$$

Zu jedem Wert der Bezugsamplitude $A_n$ gehört also eine Schar von Werten $A_1$ bis $A_{n-1}$. Folglich können auch zu jedem $A_n$ die Werte der Koeffizienten $a_{i\nu}$ und $a^*_{i\nu}$ angegeben werden. Bei einer Darstellung im Raume der Koeffizienten gibt es also zu jedem $A_n$ einen Punkt, der sich bei Veränderungen von $A_n$ längs einer Kurve, der „$A$-Kurve" bewegt. In früheren Untersuchungen wurde nun gezeigt, daß aus der Lage dieser $A$-Kurve zur Stabilitätsgrenzkurve oder Stabilitätsgrenzfläche die interessierenden Eigenschaften von Systemen, deren Ersatzsystem die Form (2) hat, abgelesen werden können. Die Ergebnisse können auch analytisch formuliert werden, wenn man die Abhängigkeit der die Stabilitätsgrenze bestimmenden *Routh*schen Diskriminante von der Bezugsamplitude $A_n = A$ berücksichtigt. $R$ ist nach Definition eine Funktion der Koeffizienten $a_{i\nu}$ und $a^*_{i\nu}$. Da diese von den $A_\nu$ abhängen und wegen (19) ist also $R$ auch eine Funktion von $A$, deren Differentialquotient

$$R' = \frac{dR}{dA} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left( \frac{\partial R}{\partial a_{i\nu}} \frac{da_{i\nu}}{dA_\nu} + \frac{dR}{\partial a^*_{i\nu}} \frac{da^*_{i\nu}}{dA_\nu} \right) \frac{dA_\nu}{dA} \tag{20}$$

alle wichtigen Eigenschaften zu bestimmen gestattet. Es gilt[1]:

1. Die aus (12), (13) und (17) ausgerechneten Dauerschwingungen sind stabil, wenn

$$(R')_{R=0} > 0 \tag{21}$$

ist. Ist dieser Wert negativ, so sind die Dauerschwingungen instabil.

2. Eine Stabilitätsgrenze ist gefährlich im Kleinen (im Sinne von *Bautin*), wenn in ihrer Nähe

$$(R')_{A=0} < 0 \tag{22}$$

gilt. Bei Ungefährlichkeit im Kleinen ist der gleiche Ausdruck positiv.

3. Eine Stabilitätsgrenze ist gefährlich im Großen, wenn in ihrer Nähe

$$(R')_{A\to\infty} < 0 \tag{23}$$

gilt. Bei Ungefährlichkeit im Großen ist der Ausdruck positiv.

4. Die Erregung von Dauerschwingungen ist weich, wenn $R(0) < 0$ ist und zwischen dem Amplitudenwert der betrachteten Dauerschwingung $A = A_d$ und dem Wert $A = 0$ keine weitere Lösung des Systems (12), (13), (17), also keine weitere mögliche Dauerschwingung existiert. Hieraus folgt z. B. sofort, daß Systeme, die nur eine, und zwar stabile Dauerschwingungsamplitude besitzen, stets weich erregt werden können.

5. Die Erregung von Dauerschwingungen ist hart, wenn außer der betrachteten Amplitude $A = A_d$ der Dauerschwingung noch mindestens ein kleinerer Wert $A = A_c < A_d$ existiert, der zu einer instabilen Dauerschwingung gehört.

Bezüglich weiterer Einzelheiten muß auf die zitierte frühere Arbeit[2] verwiesen werden.

**4. Beispiele.** Es sollen im folgenden zwei besonders einfache Beispiele behandelt werden, die auch streng mit elementaren Mitteln lösbar sind. Der Fehler der Näherungsrechnung ergibt sich dann unmittelbar durch Vergleich. Ein komplizierteres nicht mehr elementar lösbares Problem dieser Art soll gesondert veröffentlicht werden.

a) Ein System erster Ordnung. *E. Schmidt*[3] hat nachgewiesen, daß die lineare Funktional-Differentialgleichung

$$\dot{x} + c\,x(t-\tau) = 0, \tag{24}$$

harmonische Lösungen von der Form

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \tag{25}$$

---

[1] Vgl. Fußnote 9 von S. 341, dort Kap. 2.3.
[2] Vgl. Fußnote 9 von S. 341.
[3] Vgl. Fußnote 2 von S. 341.

mit beliebigen Konstanten $a$ und $b$ unter der Bedingung besitzt, daß

$$\omega = c = \frac{\pi}{2\tau} \pm \frac{2n\pi}{\tau} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{26}$$

ist. In jedem anderen Falle gibt es nur die triviale Lösung $x = 0$.

Nach dem hier beschriebenen Verfahren bekommt man für das Totzeitglied einen linearen Ersatzausdruck

$$c\,x(t-\tau) = a\,x + a^*\dot{x}\ . \tag{27}$$

Mit $f(x) = c\,x$ folgt aus (3) und (4)

$$K_s\{f\} = c\ , \qquad K_c\{f\} = 0\ ,$$

so daß man aus (9) und (10) die Ersatzkoeffizienten

$$a = c\cos\omega\tau\ , \qquad a^* = -\frac{c\sin\omega\tau}{\omega} \tag{28}$$

erhält. Für (24) ergibt sich somit die lineare gewöhnliche Ersatz-Differentialgleichung

$$\dot{x}\left(1 - \frac{c\sin\omega\tau}{\omega}\right) + x\,c\cos\omega\tau = 0\ . \tag{29}$$

Wenn periodische Lösungen dieser Gleichung möglich sein sollen, muß notwendigerweise

$$1 - \frac{c\sin\omega\tau}{\omega} = 0\ , \qquad c\cos\omega\tau = 0\ , \tag{30}$$

gelten. Daraus folgt aber die schon von *Schmidt* streng abgeleitete Beziehung (26). Die Frequenz wird also von der Näherungslösung fehlerfrei wiedergegeben. Die Amplitude bleibt unbestimmt, wie es bei einem linearen Problem nicht anders zu erwarten ist.

Nun soll (24) durch Einführung der Vorzeichenfunktion sgn zu einer nichtlinearen Differentialgleichung gemacht werden:

$$\dot{x} + c\ \mathrm{sgn}\ x(t-\tau) = 0\ . \tag{31}$$

Es liegt hier ein besonders einfacher Fall einer „Zweipunktregelung" vor, da das zweite Glied nur der beiden diskreten Werte $+c$ und $-c$ fähig ist. Die strenge Lösung von (31) ist

$$\dot{x} = \mp c, \qquad x = \mp ct + x_0\ .$$

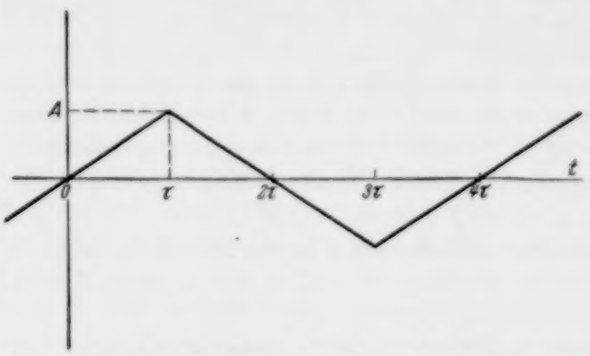


Abb. 1. Amplituden-Zeit-Kurve für die periodische Grundlösung von (31), (τ = Totzeit).

Beginnt man die Zeitzählung beim Nulldurchgang der $x$-Koordinate, so bekommt man als $x(t)$-Kurve eine Dreieckschwingung, wie sie Abb. 1 zeigt. Ihre Ampltiude ist

$$A = c\,\tau\ , \tag{32}$$

ihre Frequenz

$$\omega = \frac{\pi}{2\tau}\ . \tag{33}$$

Nach der Näherungsrechnung hat man zunächst

$$c\ \mathrm{sgn}\ x(t-\tau) = a\,x + a^*\dot{x}\ . \tag{34}$$

Für die Sprungfunktion $f(x) = c\ \mathrm{sgn}\ x$ folgt aus (3) und (4) bzw. aus einer Tafel von $K$-Transformierten:

$$K_s\{f\} = \frac{4c}{\pi A}, \qquad K_c\{f\} = 0\ .$$

Dann ergibt (9) und (10)

$$a = \frac{4c}{\pi A}\cos\omega\tau\ , \qquad a^* = -\frac{4c}{\pi A\,\omega}\sin\omega\tau\ ,$$

so daß als lineare Ersatzdifferentialgleichung für (31)

$$\dot{x}\left(1 - \frac{4c}{\pi A\,\omega}\sin\omega\tau\right) + x\,\frac{4c}{\pi A}\cos\omega\tau = 0 \tag{35}$$

erhalten wird. Periodische Lösungen dieser Differentialgleichung sind nur möglich für

$$1 - \frac{4c}{\pi A \omega} \sin \omega \tau = 0 , \qquad \frac{4c}{\pi A} \cos \omega \tau \neq 0 . \tag{36}$$

Da die Amplitude $A$ nur positiver Werte fähig ist, folgen also Lösungen mit den Frequenzen und Amplituden

$$\omega = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi\right) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2 \ldots) , \tag{37}$$

$$A = \frac{4c}{\pi \omega} = \frac{4c\tau}{\pi\left(\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi\right)} .$$

Im Falle $n = 0$ ist der Frequenzausdruck identisch mit der strengen Lösung (33), während bei der Amplitude $A$ der Faktor $8/\pi^2$ an Stelle von 1 steht, also ein um 18,9% zu kleiner Wert erhalten wird.

Für andere Werte von $n$ bekommt man Schwingungen, bei denen innerhalb der Totzeit ein mehrmaliges Umschalten erfolgt. Wie man sich leicht überlegt, folgen dafür aus (37) jeweils die streng richtigen Frequenzwerte, jedoch Amplitudenwerte, die stets um den Faktor $8/\pi^2$ zu klein sind. Derartige höherfrequente Schwingungen sind zwar theoretisch und unter gewissen Voraussetzungen auch praktisch möglich, jedoch genügt zu ihrem Zustandekommen nicht die Vorgabe irgendwelcher bestimmter Anfangsbedingungen; es muß vielmehr eine Vorgeschichte von der Zeitdauer $\tau$ mit genau definierten Nulldurchgängen vorhanden sein.

b) Eine unstetige Regelung zweiter Ordnung. Ergänzt man die Differentialgleichung (31) noch durch ein „Schleppglied", so findet man

$$T\ddot{x} + \dot{x} + c \operatorname{sgn} x(t - \tau) = 0 , \tag{28}$$

wobei $T$ als eine Zeitkonstante aufgefaßt werden kann. Eine Differentialgleichung dieser Art erhält man zum Beispiel bei der näherungsweisen Berechnung der Kursregelung von Schiffen oder Flugzeugen, wenn nur die Momentengleichung berücksichtigt wird und der Regler selbst nach dem Schwarz-Weiß-Prinzip (Zweipunktregler) arbeitet.

Zunächst soll eine periodische strenge Lösung von (38) angegeben werden. Im Bereich $x(t - \tau) > 0$ folgt aus (38)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= B_1 e^{-\frac{t}{T}} - c , \\ x &= -B_1 T e^{-\frac{t}{T}} - c t + B_2 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

mit den beiden Integrationskonstanten $B_1$ und $B_2$. Für den Bereich $x(t - \tau) < 0$ erhält man entsprechende Ausdrücke, bei denen nur das Vorzeichen von $c$ verändert ist. Wenn sich die Lösungen aus beiden Bereichen zu einer periodischen Gesamtlösung zusammensetzen sollen, so müssen die folgenden Anstückelungsbedingungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} x(t_1) &= -x(0) , \\ \dot{x}(t_1) &= -\dot{x}(0) , \\ x(t_1 - \tau) &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Die ersten beiden Bedingungen bringen zum Ausdruck, daß periodische Lösungen in beiden Bereichen symmetrisch sein müssen, die dritte Bedingung definiert die Zeit $t_1$, in der die Lösung (39) die Grenze ihres Gültigkeitsbereiches erreicht. Hierbei ist $t_1$ gleich der halben Schwingungszeit.

Durch Einsetzen von (39) in (40) bekommt man zunächst zwei Gleichungen für $B_1$ und $B_2$, aus denen die beiden Integrationskonstanten ausgerechnet werden können,

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{2c}{1 + e^{-\frac{t_1}{T}}} , \\ B_2 &= cT + \frac{c}{2} t_1 , \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

sowie eine Gleichung für die unbekannte Schaltzeit $t_1$

$$t_1 - 2(\tau + T) + \frac{4\,T\,e^{\frac{\tau}{T}}}{1 + e^{-\frac{t_1}{T}}} = 0\,. \tag{42}$$

Hat man aus dieser Gleichung $t_1$ — zum Beispiel durch Iteration — gefunden, so ist die Frequenz der Schwingung

$$\omega = \frac{\pi}{t_1}\,. \tag{43}$$

Die Amplitude der periodischen Lösung folgt aus $\dot{x}(t_0) = 0$ und $x(t_0) = A$. Aus (39) findet man leicht

$$t_0 = -\,T \ln \frac{c}{B_1}\,, \tag{44}$$

$$A = B_2 - c\,T\left(1 - \ln \frac{c}{B_1}\right), \tag{45}$$

oder unter Berücksichtigung von (41) nach Umformung:

$$A = c\left\{\frac{t_1}{2} + T \ln\left[\frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{t_1}{T}}\right)\right]\right\}. \tag{46}$$

Für gegebene Parameter $T$, $\tau$ und $c$ des Systems bestimmt man also zunächst aus (42) den Wert $t_1$, der wegen (43) unmittelbar die Frequenz der Schwingung ergibt. Danach kann aus (46) der zugehörige Wert für die Amplitude $A$ errechnet werden. Man beachte, daß die Frequenz der Schwingung nicht von dem Parameter $c$ abhängt, während die Amplitude proportional zu ihm ist.

Nach der Näherungsrechnung bekommt man zunächst denselben linearen Ersatzausdruck (34) wie im vorigen Beispiel. Auch die Ausdrücke für die Koeffizienten $a$ und $a^*$ ändern sich nicht. Die lineare Ersatzdifferentialgleichung wird demnach

$$T\ddot{x} + \left(1 - \frac{4\,c}{\pi A\,\omega}\sin\omega\tau\right)\dot{x} + \left(\frac{4\,c}{\pi A}\cos\omega\tau\right)x = 0\,. \tag{47}$$

Die *Routh*sche Diskriminante reduziert sich in diesem einfachen Fall auf den Faktor von $\dot{x}$, während das Quadrat der Frequenz in bekannter Weise als Quotient der Faktoren von $x$ und $\ddot{x}$ erhalten wird. Man hat somit zur Bestimmung stationärer Schwingungen die beiden Gleichungen

$$R = 1 - \frac{4\,c}{\pi A\,\omega}\sin\omega\tau = 0\,, \tag{48}$$

$$\omega^2 = \frac{4\,c}{\pi A\,T}\cos\omega\tau\,. \tag{49}$$

Durch Elimination der Amplitude folgt daraus eine Gleichung für die Frequenz:

$$\operatorname{tg}\omega\tau = \frac{1}{\omega T}\,. \tag{50}$$

Da $A$ nur positiver Werte fähig ist, so sieht man aus (48) und (49), daß nur solche Lösungen für $\omega$ physikalisch sinnvoll sind, für die $\cos\omega\tau > 0$ und $\sin\omega\tau > 0$ ist.

Hat man $\omega$ ermittelt, so folgt die Amplitude sofort z. B. aus (48)

$$A = \frac{4\,c}{\pi\,\omega}\sin\omega\tau\,. \tag{51}$$

Wie bei der strengen Lösung ist $A$ proportional zu $c$, während $\omega$ von $c$ unabhängig ist.

Für ein festes Wertepaar $c$ und $T$ ist der prozentuale Fehler der Näherungslösungen für $\omega$ und $A$ als Funktion der Totzeit $\tau$ ausgerechnet und in Abb. 2 aufgetragen worden.

Zur Untersuchung der Stabilität sowie der Gefährlichkeit wird gebildet

$$\frac{dR}{dA} = \frac{\partial R}{\partial A} + \frac{\partial R}{\partial\omega}\frac{d\omega}{dA}\,. \tag{52}$$

Mit dem Ausdruck von (48) bekommt man

$$\frac{dR}{dA} = \frac{4c}{\pi A^2 \omega} \sin \omega\tau - \frac{\omega T (\sin \omega\tau - \tau \cos \omega\tau)}{A (2 \cos \omega\tau + \tau \sin \omega\tau)}. \tag{53}$$

Nach (21) entscheidet das Vorzeichen dieses Ausdruckes für den Fall $R = 0$ über die Stabilität. Berücksichtigt man (50) und (51), so folgt aus (53)

$$\left(\frac{dR}{dA}\right)_{R=0} = \frac{T + \tau + \tau \omega^2 T^2}{A (2T + \tau)} > 0. \tag{54}$$

Die ausgerechnete Dauerschwingung ist also stabil.

Zur Klärung der Frøge der Gefährlichkeit im Kleinen ist in (53) der Grenzübergang $A \to 0$ vorzunehmen. Wegen $\cos \omega\tau \to 0$ und $\sin \omega\tau \to +1$ findet man

$$\left(\frac{dR}{dA}\right)_{A=0} \to +\infty .$$

Die Stabilitätsgrenze des Systems ist also nach (22) ungefährlich im Kleinen.

Im anderen Grenzfalle $A \to \infty$ bekommt man

$$\left(\frac{dR}{dA}\right)_{A\to\infty} \to 0 ,$$

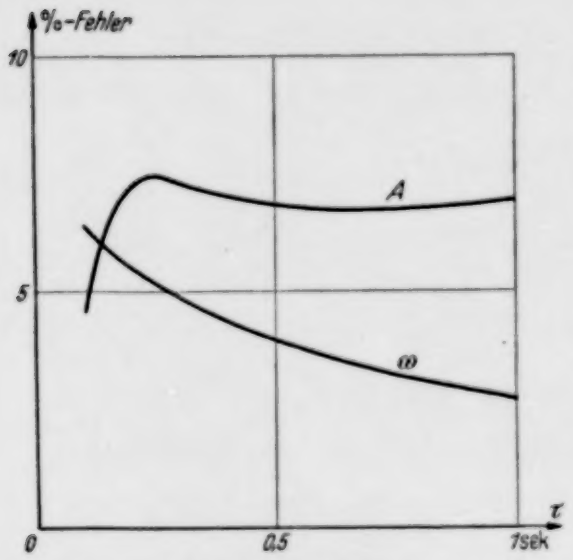


Abb. 2. Prozentualer Fehler der Näherungen für die Amplitude $A$ und die Frequenz $\omega$ als Funktionen der Totzeit $\tau$ für das Beispiel b).

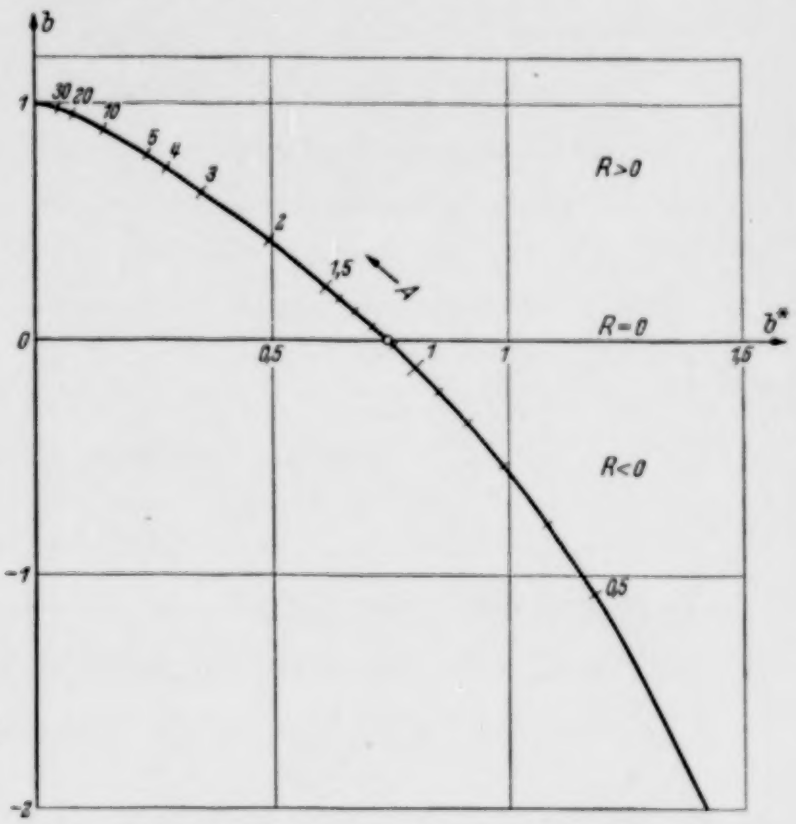


Abb. 3. Stabilitätsdiagramm für das Beispiel b).

wobei, wie man leicht feststellt, der Differentialquotient von positiven Werten gegen Null geht. Obwohl die Stabilitätsgrenze des Systems nach dem Kriterium (23) weder als gefährlich noch als ungefährlich im Großen bezeichnet werden kann, wird sie praktisch ungefährlich im Großen sein, da bei großen, aber endlichen Werten für $A$ auf jeden Fall

$$\left(\frac{dR}{dA}\right) > 0$$

ist.

Man kann die hier analytisch aus den Kriterien (21), (22) und (23) ermittelten Eigenschaften auch durch eine Untersuchung des Verlaufs der „$A$-Kurve" bekommen. Wir zeichnen diese Kurve zusammen mit der Stabilitätsgrenzkurve in der Ebene der beiden Koeffizienten $b$ und $b^*$, die durch Umschreiben von (47) in die Form

$$\ddot{x} + b\,\dot{x} + b^*\,x = 0$$

erhalten werden. $b$ ist dann bis auf den Faktor $1/T$ gleich dem Wert $R$ von (48), $b^*$ ist gleich dem Wert $\omega^2$ von (49). Aus (49) kann nun zu jedem Wert von $A$ der zugehörige Wert von $\omega$ ausgerechnet werden. Dann folgt aus (48) für jedes Wertepaar $A$, $\omega$ der entsprechende Wert von $R$

und damit auch von $b$. Die so erhaltene $A$-Kurve in der $bb^*$-Ebene zeigt Abb. 3, wobei als Parameter auf der Kurve die Werte von $A$ angeschrieben wurden. Die Kurve kommt aus dem negativ Unendlichen und geht mit $A \to \infty$ gegen den Punkt $b = 1; b^* = 0$. Die Stabilitätsgrenzkurve ($R$-Kurve) ist nach (48) durch $R = 0$ gegeben, d. h. in unserem Falle durch $b = 0$. Im oberen Quadranten ist $R > 0$ (stabiler Bereich), im unteren ist $R < 0$ (instabiler Bereich).

$A$-Kurve und $R$-Kurve schneiden sich im Punkte $A_0 = 1{,}12$; $b^* = \omega^2 = 0{,}740$. Damit sind Amplitude und Frequenz der Dauerschwingung bestimmt. Ihre Stabilität folgt einfach aus der Tatsache, daß die $A$-Kurve mit wachsendem $A$ vom instabilen Bereich kommend in den stabilen eindringt. Für kleine Werte von $A$ läuft die $A$-Kurve auf den Stabilitätsbereich zu, folglich ist die Stabilitätsgrenze als ungefährlich im Kleinen anzusprechen. Im Grenzfalle $A \to \infty$ wird die $A$-Kurve parallel zur Stabilitätsgrenze; das System ist also streng genommen im Großen neutral, jedoch kann es praktisch als im Großen ungefährlich angesehen werden, da die $A$-Kurve für endliche große Werte von $A$ noch immer von der Stabilitätsgrenze fortläuft. Nach den im Kap. 3 angegebenen Kriterien können die Dauerschwingungen weich erregt werden, denn es existiert nur ein Schnittpunkt von $A$- und $R$-Kurve, und dieser gehört zu einer stabilen Dauerschwingung.

(Eingegangen am 14. Februar 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Kurt Magnus*, Freiburg/Breisgau, Unterlinden 7.

## Konstruktive Grundzüge und praktische Erfahrungen beim Bau und Betrieb von Stahlwasserbauten

Von Dipl.-Ing. **Franz Köhler,** München. Mit 75 Abbildungen. VII, 135 Seiten Gr.-8°. 1956.

Steif geheftet DM 13,20

Inhaltsübersicht: Erster Teil: **Wehrverschlüsse.** A. Allgemeines: Bewegliche Wehrverschlüsse. Antriebe. Gewichte und Kosten. — B. Dichtungen: Allgemeine Anforderungen. Ausführungsarten. — C. Wehrbeheizung. — D. Unterwasserrostschutz. — E. Berechnung von Stahlwasserbauten: Stahlkonstruktionen. Antriebe. — Zweiter Teil: **Schleusenverschlüsse.** A. Allgemeine Aufgaben der Füll- und Entleerungsorgane: Binnenschleusen. Seeschleusen. — B. Statische und konstruktive Grundsätze: Allgemeines. Lastannahme. Statische, konstruktive und bauliche Besonderheiten. — C. Antriebe: Allgemeines. Huborgane. Motorleistungen. Bemessungsgrundlagen. Anwendung bei verschiedenen Verschlußsystemen. — D. Unterwasserrostschutz. — E. Zusammenfassung. — Sachverzeichnis.

Das Fachgebiet des Stahlwasserbaues hat durch die nach Kriegsende wieder einsetzende Bautätigkeit neuen Aufschwung erfahren. Neben den im Wehr- und Schleusenbau allgemein auftretenden Problemen bautechnischer Art haben vor allem auch die Verschlußkonstruktionen und die Antriebe zahlreiche Verbesserungen aufzuweisen. Teilweise ist auch eine neue Entwicklung erkennbar. Maßgeblich beteiligt an diesen Fortschritten sind die Erfahrungen, die in den letzten 30 Jahren beim Bau und Betrieb von Stahlwasserbauten gesammelt werden konnten. Diese zu vermitteln und den gegenwärtigen Stand der Entwicklung aufzuzeigen, ist der Zweck dieser zusammenfassenden Abhandlung.

## Veröffentlichungen zur Erforschung der Druckstoßprobleme in Wasserkraftanlagen und Rohrleitungen

Herausgegeben von Dr.-Ing. **Friedrich Tölke,** Docteur ès Sciences h. c., o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Zweites Heft: Mit 225 Abbildungen. V, 149 Seiten 4°. 1956. DM 37,50

Inhaltsübersicht: **Über die konstruktive Gestaltung der druckstoßgefährdeten Teile von Wasserkraftanlagen.** Von Professor Dr.-Ing. Fr. Tölke, Stuttgart. — **Experimentelle Untersuchungen über die Stützwirkung der Druckschachtpanzerung der Druckrohrleitung eines Alpen-Wasserkraftwerkes.** Von Professor Dr.-Ing. W. Pelikan, Stuttgart. — **Nichtstationäre Strömungen in Unterwasserstollen.** Von Dr.-Ing. H. Blind, München. — **Druckstoß und Wasserschlag beim Abschluß von Hauswasserleitungen.** Von Oberbaurat W. Gandenberger, Stuttgart. — **Berechnung der Größe der Druckwindkessel bei Wasserwerken.** Von Professor Dr. phil. K. Ludwig † und Baurat Dr.-Ing. H. Stack, Hannover.

SPRINGER-VERLAG BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

# Die Statik im Stahlbetonbau

Ein Lehr- und Handbuch der Baustatik. Von Dr.-Ing. **Kurt Beyer,** ehem. ord. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Zweiter berichtigter Neudruck. Mit 1372 Abbildungen im Text, zahlreichen Tabellen und Rechenvorschriften. XII, 804 Seiten Gr.-8°. 1956. Ganzleinen DM 66,—

Um der regelmäßigen Nachfrage zu genügen, wurde ein zweiter berichtigter Neudruck hergestellt. „Im Gegensatz zu einer Reihe von Lehrbüchern über Statik entwickelt der Verfasser nicht eine eigene neue Methode mit dem etwaigen Nachweis der Anwendbarkeit auf die typischen Tragwerksformen. Vielmehr fußt er auf dem Bestand der vorliegenden wissenschaftlichen Arbeiten, aus denen er in kritischer Würdigung das Gemeinsame der zahlreichen verschiedenartigen Methoden der Baustatik herausschält und zu einer quasi übergeordneten Theorie des Tragwerkes verarbeitet und einheitlich zusammenfaßt. Hierzu dient insbesondere die eingehende Darstellung der Grundlagen der Baustatik, die die Einleitung des Werkes bildet. Die ersten vier Kapitel enthalten die Theorie des Tragwerkes, und zwar: Grundlagen, das statisch bestimmte Tragwerk, die Formänderung des ebenen Stabzuges und die statisch unbestimmten Tragwerke. Kapitel V behandelt die Anwendung der Theorie auf die hauptsächlichen Tragwerksformen, wie Durchlaufträger, Stockwerksrahmen, Rahmenträger, Silozellen, Bogenträger, Zweigelenk- und eingespannter Bogen, Kreisringträger und Trägerroste. Den Abschluß bildet Kapitel VI mit der Behandlung der Flächentragwerke, wie Platten, Scheiben und Schalen. Mit Rücksicht auf den erheblichen Umfang des gesamten Stoffgebietes ist der Text straff gefaßt, dabei erschöpfend und streng wissenschaftlich, so daß schon eine gewisse Mitarbeit des Lesers erforderlich ist, um den vollen Gehalt der prägnanten Ausführungen zu erschließen. Jedes Teilgebiet wird zunächst theoretisch behandelt und begründet und dann an gut gewählten Beispielen, die z. T. vom theoretischen Ansatz bis zum Ergebnis voll durchgerechnet sind, erläutert und mit zahlreichen Tabellen und Rechenvorschriften versehen, die die Arbeit des praktischen Ingenieurs wesentlich erleichtern und abkürzen. Durch diese Verbindung zwischen abstrakter Theorie und der konkreten Anwendung auf den Einzelfall wird das Werk zum wirklichen Handbuch der Praxis. Für den wissenschaftlich arbeitenden Ingenieur geben die hinter jedem Abschnitt eingeschalteten Literaturhinweise die Möglichkeit zu einem vertieften Studium der Sondergebiete an. Durch die weitgehende Unterteilung der einzelnen Abschnitte, die straffe Ordnung und Gliederung des Stoffes, das ausführliche Sachregister und Verzeichnis der Rechenvorschriften und Zahlenbeispiele wird die Benutzung des Werkes sowohl zum Studium der Statik wie zur Lösung von Einzelfragen angenehm erleichtert. Die bewunderungswürdige Systematik und die Einheitlichkeit im Aufbau der Theorie in Verbindung mit den Anwendungsbeispielen der Praxis verbürgen dem Werk einen bleibenden Wert und stellen es in die Spitzenleistungen der deutschen Fachliteratur." „Baustatik"

# Bemessungsverfahren für Verbundträger

Von Dr.-Ing. **Günter Utescher,** Karlsruhe. Mit 27 Abbildungen und 24 Bemessungstafeln. VII, 39 Seiten und 24 Tafeln. Gr.-8°. 1956. Steif geheftet DM 12,—

Inhaltsverzeichnis: **A. Einführung. — B. Blechträger:** Ableitung der Bemessungsgleichung. Durchführung der Bemessung. Der Sonderfall $M_v = M_v$, $Kr$. Der Sonderfall $M_{st} = 0$. Verstärkung des Stahlobergurtes. — **C. Walzprofil-Träger:** Aufstellung der Bemessungstafeln. Benutzung der Bemessungstafeln. Verstärkung von Walzprofilen. — **D. Kriechen:** Wahl des Verfahrens. Nachweis der Kriechspannungen nach Fritz. Nachweis der Kriechspannungen nach Müller. — **E. Schwinden:** Wahl des Verfahrens. Nachweis der Schwindspannungen nach Fritz. Nachweis der Schwindspannungen nach Müller. — **F. Temperatur. — G. Abstufung der Stahlträgergurte. — H. Walzprofil-Träger der Gruppe I/DIN 4239:** Aufstellen der Tragfähigkeitstafeln. Benutzung der Tragfähigkeitstafeln. Nachweis der Betonspannung. — **I. Zahlenbeispiele:** I. Bemessung eines Blechträger-Verbundquerschnittes für Beanspruchung durch $M_{st}$ und $M_v$. — II. Bemessung eines Blechträger-Verbundquerschnittes für Beanspruchung allein durch $M_v$. III. Verstärkung des Stahl-Obergurtes. — IV. Bemessung eines Walzprofil-Verbundquerschnittes mit Nachweis der Kriech- und Schwindspannungen. — V. Bemessung eines Verbundträgers mit Abstufung des Untergurtes. — VI. Bemessung eines Walzprofil-Verbundquerschnittes der Trägergruppe I. — Vereinfachter Nachweis. — **Schrifttum. — Tafelanhang:** Tafel 1—12 für Normalprofil-I-Träger, Tafel 13 bis 24 für Breitflansch-I-Träger.

Die Zulassung der Verbundbauweise für den Brückenbau und Hochbau hat nicht nur neue, mit wirtschaftlichen Vorteilen verbundene Konstruktionsgrundsätze gebracht, sondern auch einen erheblichen Aufwand an statischen Untersuchungen, Querschnittsermittlungen und Spannungsnachweisen zur Folge gehabt. Das Ziel, die zulässigen Stahl- und Betonspannungen nicht nur einzuhalten, sondern auch möglichst auszunutzen, hat die Bemessung von Verbundquerschnitten zu einer mühsamen und zeitraubenden Probierarbeit werden lassen.
Die vorliegende Arbeit hat sich zum Ziel gesetzt, das bisherige Ausprobieren eines mehr oder weniger willkürlich gewählten Stahlträgerquerschnittes durch eine planmäßige Querschnittsbestimmung zu ersetzen, bei der die spannungsbildenden Einflüsse des Kriechens und Schwindens durch Näherungsformeln erfaßt werden, die in der Regel nur noch eine geringe, aber auch wieder planmäßig errechenbare Korrektur erforderlich machen.

---

**SPRINGER · VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG**

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. IX/7/2 0,8 K. B./Z.040.